

**LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES
EXPONENCIALES EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA**

Por

Tomás Díaz Berríos

Disertación Doctoral sometida al Programa Doctoral en Educación del Recinto de
San Germán de la Universidad Interamericana de Puerto Rico para optar por el
grado de Doctor en Educación con especialidad en Educación en Matemática

Mayo de 2023

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

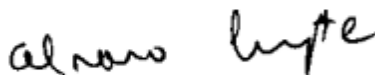
Nosotros, los miembros del Comité de Disertación Doctoral y del Comité de Defensa del estudiante Tomás Díaz Berríos, certificamos que la investigación sometida por este cumple con los requisitos para las disertaciones doctorales establecidos por el Programa Doctoral en Educación del Recinto de San Germán, de la Universidad Interamericana de Puerto Rico y, para que así conste, firmamos, certificando la aprobación de la misma.

Aprobada: 20 de abril 2023
Fecha

Rafael Martinez Planell, PhD
Presidente del Comité



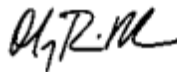
Alvaro Lecompte Montes, PhD
Miembro del Comité



Luis Fernando Cáceres Duque, PhD
Miembro del Comité



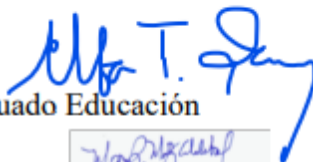
Olgamary Rivera Marrero, PhD
Lector de Defensa



Ángel Cruz Delgado, PhD
Lector de Defensa



Elba Irizarry Ramírez, EdD
Coordinadora Programa Graduado Educación



Fecha 20 de abril de 2023

Mary Luz Martínez Aldebol, EdD
Directora Ciencias Sociales, Educación y Humanidades



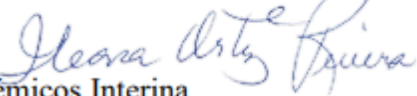
Fecha 20 de abril de 2023

Carlos E. Irizarry Guzmán, DBA
Director Escuela de Estudios Graduados e Investigación



Fecha 20 de abril de 2023

Ileana Ortiz Rivera, EdD
Decana de Asuntos Académicos Interina



Fecha 20 de abril de 2023

CERTIFICACIÓN DE AUTORIA DE LA TESIS DE INVESTIGACIÓN CUALITATIVA

Yo, Tomás Díaz Berríos, certifico que la disertación doctoral titulada “La enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales en estudiantes de secundaria”, la cual presento en esta certificación de autoría, como requisito para optar por el Grado de Doctor en el (Programa Académico Doctorado de Educación en D001 Educación en Matemática) del Recinto de San Germán de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, es el producto de mi labor investigativa. Asimismo, doy fe que este trabajo es uno original e inédito.

Que en la investigación cualitativa que presento, yo he cumplido con las normas y principios que exige el uso y procesamiento de datos e información de los distintos autores para no incurrir en plagio (APA) y con el manual de Procedimientos Relacionados con la Disertación Doctoral.

Nombre: Tomás Díaz Berríos

Firma: 

Fecha: 15 de mayo de 2023

RESUMEN

En esta tesis se aplica la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) para estudiar como estudiantes de escuela secundaria pueden construir función exponencial basándose en multiplicación repetida. Para ello, se comenzó por proponer un modelo, en término de las estructuras y mecanismos de APOE, que los estudiantes podrían hacer para entender funciones exponenciales. Ese modelo, que en APOE se llama descomposición genética, se aplicó para diseñar actividades pedagógicas con el fin de ayudar a que los estudiantes hagan las construcciones propuestas. Luego de esto se implantaron las actividades con estudiantes de una clase de precálculo en escuela secundaria. Siguiendo el tratamiento, la descomposición genética se puso a prueba por medio de entrevistas semiestructuradas con ocho de los estudiantes del curso. Se buscaba contestar las siguientes preguntas de investigación: La descomposición genética que se propone en esta tesis, ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden función exponencial? De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes de secundaria dan muestra de poder hacer y las que les causan dificultad? Se halló que la descomposición genética describe como los estudiantes pueden construir un objeto (según APOE) de función exponencial en los enteros. Algunos estudiantes pudieron construir un proceso de función exponencial en los números racionales. Este resultado extiende y mejora resultados previos en la

literatura. Usando actividades de aprendizaje, manipulativos, y tecnología se evidenció que los estudiantes pudieron desarrollar su entendimiento de función exponencial basándose en multiplicación repetida mediante el descubrimiento y formulación de conjeturas. Este estudio de tesis contribuye a entender cómo los estudiantes pueden construir su entendimiento de las funciones exponenciales, y cómo ayudarles a hacer esto.

Palabras claves: APOE, Función Exponencial, Descomposición Genética, modelo RBC+C, Función.

PREFACIO

DEDICATORIA

Dedico mi tesis principalmente a Dios, por darme la salud, el don de discernimiento, sabiduría, paz, resistencia, perseverancia, disciplina, dedicación y la fuerza necesaria para culminar esta meta.

A mi familia: mi esposa Betzaida, mis hijos Reinaldo José, Karina Liz y Alondra quienes fueron mi mayor motivación e inspiración: los que, con amor y paciencia me apoyaban día a día para que lograra tener el entusiasmo, energía y el impulso para lograr mi sueño.

A mis padres Eneida y Tomás, por acompañarme en cada paso que doy en la búsqueda de ser mejor persona y profesional. A mis tías por todos los consejos, el apoyo que me brindaron, las oraciones que le ofrecieron a Dios, para que yo pudiera lograr este objetivo.

También a mi hermano Frankie y amigos por brindarme su apoyo en los largos años de estudio para alcanzar esta meta académica. Espero que este proyecto les sirva de ejemplo de que todo se puede lograr con el favor de Dios y disciplina.

RECONOCIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas que con su gentileza, gratitud, amabilidad, dedicación, esmero, cooperación, disciplina y sentido de responsabilidad me brindaron buenos consejos y mentoría para realizar este trabajo. En especial al Comité de Disertación Doctoral compuesto por: el Dr. Rafael Martínez Planell, el Dr. Álvaro Lecompte Montes, el Dr. Luis Fernando Cáceres Duque, la Dra. Olgamary Rivera Marrero y el Dr. Ángel Luis Cruz Delgado, quienes con sus consejos y mentoría me ayudaron a poder culminar el trabajo de tesis.

La realización de esta tesis doctoral fue posible, en especial a la mentoría, colaboración, cooperación y entrega brindada por el Dr. Rafael Martínez Planell, Catedrático de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán, Programa Doctoral en Educación en Matemática y presidente del comité de disertación quien me inspiró, motivó, apoyó a trabajar arduamente y consistentemente con rigor en todo momento desde el comienzo hasta el final de este estudio de tesis y proceso de Disertación Doctoral. Estaré siempre agradecido por toda la enseñanza que me brindó sobre el proceso de investigación y publicación de un estudio de investigación en Educación Matemática. ¡Gracias por su vocación y entrega en Educación en Matemática!

Al Sr. Carlos Molina Rivera y a la Sra. Sonia J. Alers Castillo quienes colaboraron con sus estudiantes en todo momento. También a la Dra. Saraí Nieves Bernard del (Departamento Ciencias y Tecnología) y el Dr. Alfred Soler (Director de la Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos, UIPR San Germán), quienes también participaron en el proceso de disertación doctoral.

Por último, a todos los profesores de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán, Programa Doctoral en Educación en Matemáticas los cuales siempre estuvieron dispuestos a brindarme capacitación y ayuda en todo momento. ¡Gracias a todos por su generosa colaboración y cooperación!

TABLA DE CONTENIDO

Página de Aprobación	<i>ii</i>
Certificación de Autoría	<i>iii</i>
Resumen	<i>iv - v</i>
Prefasio	<i>vi – viii</i>
Dedicatoria	<i>vi</i>
Reconocimientos	<i>vii - viii</i>
Índice de Tablas	<i>xiv</i>
Índice de Ilustraciones	<i>xv</i>
Índice de Apéndices	<i>xi - xiii</i>

CAPÍTULO I – INTRODUCCIÓN 1 - 2

- 1.1*** Antecedentes del problema ***2 - 3***
- 1.2*** Planteamiento del Problema ***3 - 4***
- 1.3*** Importancia del estudio: ***4 - 6***
- 1.4*** Paradigma ***6***
- 1.5*** Definición de términos del estudio ***6***

CAPÍTULO II – REVISIÓN DE LITERATURA 7

- Introducción ***7***
- 2.1*** Marco Teórico ***7 - 31***
- 2.2*** Literatura Científica ***31 - 44***

CAPÍTULO III ACTIVIDADES Y METODOLOGÍA 45

- Introducción ***45***
- 3.1*** DG para el estudio de la tesis ***46 – 51***

3.2 Actividades de aprendizaje 51 - 57

3.3 Metodología del estudio de la tesis 57 – 68

3.3.1 Diseño 57 - 60

3.3.2 Técnicas de recolección de información 60

3.3.3 Descripción de las técnicas 60 - 63

3.3.4 Población y Muestra 63 - 64

3.3.5 Análisis 64 – 68

3.4 Aspectos éticos 68

3.5 Plan de ejecución 68

CAPÍTULO IV RESULTADOS 69 - 103

Introducción 69

4.1 Construcción de Objeto de función exponencial en los enteros y

Proceso en los racionales 69 – 89

4.2 Construcción de Objeto de función exponencial en los enteros y

Acción en los racionales 89 – 99

4.3 Construcción de Objeto de función exponencial en los enteros y Pre-

Acción en los racionales 99 – 103

CAPÍTULO V DISCUSIÓN 104 - 117

Introducción 104

5.1 Discusión 104 – 117

CAPÍTULO VI CONCLUSIÓN 118 - 120

REFERENCIAS 121 – 130

APÉNDICES 131 - 243

Apéndice A. Aspectos éticos Certificación CITI **131 - 133**

Apéndice B. Cronograma de actividades **134 - 135**

Apéndice C. Entrevista Semiestructurada **136 - 137**

Apéndice D. Hoja de validación de tres expertos: Construcción y credibilidad del instrumento de preguntas para las entrevistas estructurada y semiestructurada **138 – 140**

Apéndice E. Carta presentación y solicitud de autorización para llevar a cabo el estudio en la Escuela San Germán Interamericana **141 – 143**

Apéndice F. Carta de colaboración para maestro en la Escuela San Germán Interamericana **144 – 147**

Apéndice G. Documento de consentimiento informado para madres, padres o encargados para solicitud de autorización participación en estudio de investigación (Escuela San Germán Interamericana) **148 – 158**

Apéndice H. Documento de consentimiento informado para maestro colaborador de la Escuela San Germán Interamericana **159 – 171**

Apéndice I. Documento de asentimiento informado para estudiantes participantes en estudio de investigación de la Escuela San Germán Interamericana **172 – 180**

Apéndice J. Carta de Colaboración de la Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos (CCSP) de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán para el estudio de Investigación **181 – 182**

Actividades de Aprendizaje 183 - 213

Apéndice K. Actividad de Aprendizaje 0 (A0) Repaso de exponentes enteros **183 – 186**

Apéndice L. Actividad de Aprendizaje 1 (A1) Estudiando sucesiones exponenciales, considerando “el moverse a la derecha en pasos unitarios” **187 – 192**

Apéndice M. Actividad de Aprendizaje 2 (A2) Estudiando sucesiones exponenciales, considerando “el moverse a la derecha en saltos” **193 – 195**

Apéndice N. Actividad de Aprendizaje 3 (A3) Extender sucesión exponencial a los enteros **196 – 199**

Apéndice O. Actividad de Aprendizaje 4 (A4) Repaso de notación funcional **200 – 203**

Apéndice P. Actividad de Aprendizaje 5 (A5) Actividad Repaso de Exponentes que son Fracciones Unitarias de la forma $\frac{1}{n}$ o Exponentes que son Fracciones no Unitarias de la forma $\frac{m}{n}$ **204 – 209**

Apéndice Q. Actividad de Aprendizaje 6 (A6) Extendiendo la definición de función exponencial a los racionales **210 – 213**

Actividades de Práctica 214 – 243**Apéndice R.** Actividad de Práctica 0 (AP0) **214 – 216****Apéndice S.** Actividad de Práctica 1 (AP1) **217 – 223****Apéndice T.** Actividad de Práctica 2 (AP2) **224 – 227****Apéndice U.** Actividad de Práctica 3 (AP3) **228 – 230****Apéndice V.** Actividad de Práctica 4 (AP4) **231 – 234****Apéndice W.** Actividad de Práctica 5 (AP5) **235 – 239****Apéndice X.** Actividad de Práctica 6 (AP6) **240 – 243**

Índice de Tablas

Tablas

Tabla 1. *Tabla hipotética de acciones epistémicas observables que se utilizó para adaptar la metodología RBC+C de la teoría sociocultural de Abstracción en Contexto AiC a la teoría APOE para llevar a cabo el análisis de los datos que se obtuvieron de las discusiones en grupo en pequeñas comunidades de aprendizaje.*
65

Tabla 2. *Tabla para llevar a cabo el análisis de las entrevistas semiestructuradas individuales de cada estudiante participante en el estudio usando APOE* **67 - 68**

Índice de Ilustraciones

Figuras

Figura 1. Teoría de APOE (basada en Asiala et al. 1996). **13**

Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y una descomposición genética (Arnon et al., 2014, p.58). **17**

Figura 3. Ciclos de investigación en APOE. **21**

Figura 4. Diagrama que recoge la interacción de las teorías con las variables de interés y su descripción. **31 - 32**

Figura 5. Manipulativo Ficha Representación Función como Máquina. **52**

CAPÍTULO I

Introducción

Las funciones exponenciales y logarítmicas son conceptos importantes que desempeñan papeles cruciales en el modelaje de fenómenos de crecimiento y decrecimiento de cantidades, incluyendo crecimiento poblacional, desintegración radioactiva, interés compuesto, presión atmosférica, crecimiento logístico, Ley de Enfriamiento de Newton, escalas musicales, escalas de pH, magnitud e intensidad de terremotos, escalas de decibels, y muchos otros fenómenos. Esto hace que su estudio sea indispensable en cursos de matemáticas, ciencias e ingeniería en la universidad (Confrey & Smith, 1995; K. Weber, 2002; Berezovski, 2004; Kenney, 2005; Watters & Watters, 2006; Williams, 2011; Ellis, Ozgurb, Kulowa, Doganc & Amidon, 2016; Alagic & Palenz, 2016; C. Weber, 2016; DePierro & Garafalo, 2018). Entender estas funciones les da mucha dificultad a los estudiantes en Nivel Secundario y en la Universidad (Confrey & Smith, 1995; K. Weber, 2002; Kenney, 2005; Alagic & Palenz, 2006; Davis, 2009; Ellis, Ozgurb, Kulowa, Doganc & Amidon, 2016; C. Weber, 2016). Este estudio es una “investigación cualitativa” de la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial mediante un diseño de estudio de caso instrumental donde se hará uso de la metodología del experimento de diseño.

En este estudio se va a usar multiplicación repetida para ayudar a que los estudiantes construyan función exponencial, primero en los naturales, luego se

extiende a los enteros y finalmente a los racionales. Por otra parte, se usan fichas de forma similar a Ferrari-Escolá et al. (2017). Además, se usará una situación en contexto de cambio continuo, similar a Ellis et al. (2015, 2016).

Este capítulo está segmentado en las siguientes secciones: Antecedentes del Problema, Planteamiento del Problema, Importancia del Estudio, Paradigma, y Definición de conceptos principales.

1.1 Antecedentes del problema

Estudios tempranos sobre la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial incluyen a Confrey (1991), Confrey y Smith (1994, 1995). Ellos observan que las funciones exponenciales tienen una rica variedad de formas representativas, por ejemplo: diagramas de árbol, así como el trío común de gráficos, tablas, y ecuaciones. Proponen que el estudio de estas funciones requiere que el estudiante se involucre profundamente en cuestiones de multiplicación repetida, observando como sucesiones aditivas de exponentes varían conjuntamente con sucesiones multiplicativas de potencias. Más tarde Weber (2002) continúa con el estudio de estas funciones, observando que hasta ese momento habian pocas publicaciones tratando el tema e influenciando con su estudio a múltiples otros estudios que le siguieron (Ellis et al., 2016; Alagic & Palenz, 2006; Davis, 2009; Prezmeg & Nenduardu, 2005; Strom, 2006; otros). Weber se enfoca en el aspecto cognitivo de cómo una acción de multiplicación repetida puede dar paso a un proceso mental que permita al estudiante imaginar

tal multiplicación sin tener que llevarla a cabo explícitamente. Otras publicaciones como las de Ellis et al. (2015, 2016), Ferrari-Escolá y Farfán (2016) y Ferrari-Escolá et al. (2017) han aportado ideas sobre las cuales construimos en esta tesis.

Las pocas investigaciones sobre como los estudiantes pueden comprender de forma adecuada los conceptos funciones exponenciales, y más aun en el contexto del entorno del estudiantado puertorriqueño (globo aerostático del pueblo de Jayuya), motivó a desarrollar esta propuesta de investigación. En esta tesis estudiamos la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales en estudiantes de secundaria. Para llevar a cabo la investigación se ampliaron y mejoraron las construcciones teóricas establecidas por Weber (2002). Se hizo esto y se adaptó el acercamiento sugerido por Ferrari-Escolá et al. (2016, 2017). También se tuvieron en cuenta los resultados reportados por Ellis et al. (2015, 2016).

1.2 Planteamiento del problema

Este estudio que se llevó a cabo consistió en una investigación cualitativa mediante un diseño de estudio de caso instrumental donde se hizo uso de la metodología del experimento de diseño. Se examinó principalmente: La descomposición genética (conjetura de construcciones mentales) que se propone

en esta tesis, ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden¹ función exponencial? De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes de secundaria dan muestra de poder hacer y las que les causan dificultad?

1.3 Importancia del estudio

En esta investigación se utilizó el modelo de Hernández (2014), considerando cinco criterios (conveniencia, relevancia social, implicaciones prácticas, valor teórico y utilidad metodológica) para evaluar la importancia potencial de la investigación. Las categorías seleccionadas para esta investigación son:

Conveniencia (¿para qué sirve?)

Esta investigación sirve para entender mejor como ayudar a que los estudiantes entiendan las nociones de funciones exponenciales. Además, sirve para investigar si el método de enseñanza ACE contribuye al mejor entendimiento de los estudiantes.

Relevancia Social

El proyecto contribuye a la mejor preparación de científicos e ingenieros, aportando así al desarrollo de una economía basada en el conocimiento y por ende a la sociedad en general. Se benefician estudiantes, futuros científicos, técnicos,

¹ Por “entender” queremos decir construir estructuras mentales de procesos u objetos, según se define en la teoría APOE.

físicos, geólogos, ingenieros, arquitectos y matemáticos entre otras profesiones.

También se benefician profesores que enseñan estos tópicos.

Implicaciones Prácticas

Esta tesis, puede ayudar a que maestros de secundaria y universidad adopten técnicas de enseñanza que mejor puedan ayudar a que sus estudiantes entiendan funciones exponenciales. Además, esta tesis; como todo desarrollo en la educación de las ciencias y matemáticas, puede contribuir a aumentar la cantidad de científicos, técnicos, ingenieros, y matemáticos. Estas disciplinas pueden contribuir a resolver una amplia gama de problemas prácticos.

Valor Teórico

Esta tesis ayuda a entender y posiblemente añadir lo qué sería un componente sociocultural en la teoría APOE, una teoría que es mayormente cognitiva. Esto se hará al analizar diálogos de grupos de estudiantes y la interacción entre maestro y estudiantes para tratar de analizar el entendimiento de un colectivo.

Utilidad metodológica

La investigación puede ayudar a estudiar el crecimiento del conocimiento en interacciones entre estudiantes y de profesores con estudiantes dentro del marco teórico de APOE. Esto conlleva recoger y analizar información de interacciones de grupo y de estudiantes con profesor en un contexto de un salón de clase real. Previo a esta tesis, toda la data que se recogía y la metodología para

analizarla con APOE era mediante entrevistas semiestructuras con estudiantes individuales.

1.4 Paradigma

En el campo de la investigación en educación en matemáticas hay lo que se conoce como un “experimento de diseño.” Surge de insatisfacción con la falta de impacto que la investigación en educación en matemática tiene en la práctica educativa. Busca dar mayor relevancia práctica a la investigación en educación matemática. Esencialmente es el estudio cuidadoso de aproximaciones progresivas a intervenciones ideales en el salón de clases. Tiene un componente de “ingeniería didáctica” donde el experimentador se sitúa en un entorno lo más natural posible y puede intervenir más, cómo lo haría en un salón de clases (para más información ver Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble (2002).

El experimento de diseño se hizo en el contexto del marco teórico APOE cuyas ideas principales se discuten más adelante.

1.5 Definición de función exponencial

Función Exponencial

Sean a y b números reales. Una función exponencial en x es una función que se puede expresar de la forma $f(x) = a \cdot b^x$, donde a es diferente de cero, $b > 0$ y $b \neq 1$.

CAPÍTULO II: REVISIÓN DE FUENTES DE INFORMACIÓN

Introducción

En este capítulo se presenta el marco teórico y una revisión de fuentes de información relacionada con la teoría, el problema, y los factores bajo estudio en esta investigación. El tema de este estudio de investigación es la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales en estudiantes de secundaria. Por medio de este proceso de revisión de literatura, el investigador expone temas relevantes que pueden ayudar a sostener y cimentar la investigación que se llevó a cabo.

2.1 Marco teórico

El marco teórico de esta investigación, está fundamentada por tres teorías: la teoría APOE fundamentada en la teoría epistemológica del conocimiento basada en la idea de noción de abstracción reflexiva de Piaget (1967/1971, 1974/1980, 1975/1985), la teoría zona de desarrollo próximo de Vygotsky (1978), y la teoría sociocultural AiC (Abstracción en Contexto) que se describe y analiza mediante su metodología del modelo de acciones epistémicas (modelo RBC + C) de Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (2015).

2.1.1 La teoría APOE

La Teoría APOE (Arnon et al., 2014) propone cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos basado en el trabajo de la teoría de Piaget sobre la abstracción reflexiva en el aprendizaje en los niños. La Teoría APOE propone un

modelo de lo que podría estar pasando en la mente de un individuo cuando está tratando de aprender un concepto matemático. Utiliza este modelo de construcciones mentales del individuo para diseñar materiales didácticos. Por otra parte, esta teoría se puede utilizar para evaluar los éxitos o fracasos de los estudiantes al enfrentarse a un problema matemático.

El acrónimo APOE se refiere a los componentes principales de la Teoría de APOE, las etapas o estructuras mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema. En la teoría APOE, se parte de la idea de que la comprensión matemática de un concepto se inicia con la manipulación de un objeto físico o mental para formar *Acciones*, de manera que la repetición de esas manipulaciones y la reflexión acerca de ellas permita que sean interiorizadas para formar *Procesos* y los cuales pueden ser encapsulados para formar *Objetos*. Luego, *Acciones*, *Procesos*, y *Objetos* se organizan en *Esquemas*. El mecanismo que permite pasar de una etapa a otra es la *abstracción reflexiva*. Esta teoría considera que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones.

La abstracción reflexiva fue una de las ideas principales de Piaget, que la consideró tanto el mecanismo principal para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento como el mecanismo por el cual todas las estructuras

lógico-matemáticas se desarrollan en la mente de un individuo. Con mucha frecuencia Piaget reiteró en muchos contextos diferentes este punto de vista. Por ejemplo, en relación con el desarrollo del pensamiento, escribió: “El desarrollo de las estructuras cognitivas se debe a la abstracción reflexiva...” (Piaget 1975/1985, p.143). Con respecto a las matemáticas, consideró que la abstracción reflexiva es el mecanismo mental por el cual se derivan todas las estructuras lógico-matemáticas (Piaget 1967/1971) y escribió que “... [la abstracción reflexiva] solo apoya y anima la inmensa edificación de la construcción lógico- matemática” (Piaget 1974/1980, p. 92).

Afirmaciones como las anteriores sobre el desarrollo de las ideas matemáticas fueron lo que primero atrajeron a Dubinsky a las ideas de Piaget sobre la abstracción reflexiva y su aplicación al pensamiento matemático. ¿Qué es la abstracción reflexiva? En diversas publicaciones Piaget facilita la respuesta a la pregunta, en dos partes. La primera parte implica la reflexión, en el sentido de la conciencia y el pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones en ese contenido, y en el sentido de reflejar el contenido y las operaciones desde un nivel o etapa cognitiva inferior a uno superior (es decir, desde Acciones a Procesos). La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y las operaciones en esta etapa superior que hace que las operaciones se conviertan en contenido al que se pueden aplicar las nuevas operaciones (de Procesos a Objetos; Piaget, 1973). Estos dos ejemplos

llevaron a Dubinsky a creer que la abstracción reflexiva podría ser una herramienta poderosa para describir el desarrollo mental de conceptos matemáticos más avanzados. Aunque Piaget no detalló cómo se puede dar la abstracción reflexiva, el lector puede encontrar más detalle en Simon, Tzur, Heinz y Kinzel (2004), quienes se dieron a la tarea de explicitar el constructo. Ahora describimos en más detalle las estructuras mentales del acrónimo APOE (para más información ver Arnon et al., 2014), así como otras ideas importantes de la teoría.

Acción

Una Acción es una transformación de un objeto matemático que se percibe como externa. Puede ser llevar a cabo un procedimiento de forma rígida siguiendo instrucciones paso a paso o siguiendo instrucciones memorizadas. La Acción se percibe como externa en el sentido de que está relativamente desconectada de otros conocimientos matemáticos del individuo, de forma tal que éste no va a poder justificar la Acción.

Proceso

Cuando se repite una acción y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser que realice la construcción mental denominada Proceso. En un Proceso, el individuo puede pensar en realizar el mismo tipo de Acción, pero ya sin la necesidad de estímulos externos. Un Proceso permite que el estudiante imagine la transformación matemática sin tener que llevarla a cabo explícitamente. El

estudiante puede imaginar la transformación, omitir pasos, y anticipar resultados.

Un Proceso implica que se han hecho conexiones significativas con otros conocimientos matemáticos y, como consecuencia, permite justificar y percibir el Proceso como independiente de representación. El poder imaginar el Proceso sin tener que llevarlo a cabo y anticipar resultados permite que el individuo tenga una imagen dinámica del Proceso y cómo se lleva a cabo la transformación matemática. Diferentes Procesos se pueden coordinar y/o revertir para hacer nuevos Procesos.

Objeto

Un Objeto se construye desde el momento en que el individuo se da cuenta del Proceso como una totalidad y puede llevar a cabo, o imaginar llevar a cabo, Acciones sobre esa totalidad. “En particular, los procesos son acciones interiorizadas y los objetos mentales surgen debido a la aplicación de acciones. Nuevas acciones conducen al desarrollo de estructuras de orden superior. Por ejemplo, en el caso de las funciones, realizar operaciones en ellas estimula su encapsulación como Objetos” (Arnon et al., 2014, p.20).

Esquema

Un Esquema para un cierto concepto matemático es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están vinculados por algunos principios generales para formar un marco en la mente del individuo que se puede aplicar a una situación problemática que involucra ese concepto (Dubinsky,

1991). Este marco debe ser coherente en el sentido de que proporciona, explícita o implícitamente, medios para determinar qué fenómenos están en el alcance del Esquema y cuáles no.

Interiorización

La interiorización es el mecanismo que hace posible el cambio mental de percibir una transformación como acción a percibirla como proceso.

Una acción debe ser interiorizada. Como hemos dicho, esto significa que se realiza alguna construcción interna relacionada con la acción. Una acción interiorizada es un proceso. La interiorización permite que uno sea consciente de una acción, reflexione sobre ella y la combine con otras acciones. (Dubinsky 1991, p. 107).

Inversión

Dubinsky definió el mecanismo de inversión como revertir un proceso. Es hacer un proceso hacia atrás.

Encapsulación

La encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso, es decir, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática a la que se pueden aplicar Acciones. Dubinsky et al. (2005a) ofrecen la siguiente explicación:

Si uno se da cuenta del proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y en realidad pueden

construir tales transformaciones (explícitamente o en la imaginación de uno), entonces decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones como formar un conjunto de funciones, definir operaciones aritméticas en dicho conjunto, equiparlo con una topología, etc. (p. 339).

Relación entre estructuras y mecanismos mentales

Las estructuras APOE y algunos de los mecanismos se ilustran en la Figura 2, que muestra que las Acciones operan en Objetos; las acciones se interiorizan en Procesos; los Procesos se encapsulan en Objetos; y los Objetos se desencapsulan de nuevo a los Procesos de donde vinieron. Todo el sistema es parte de un Esquema.

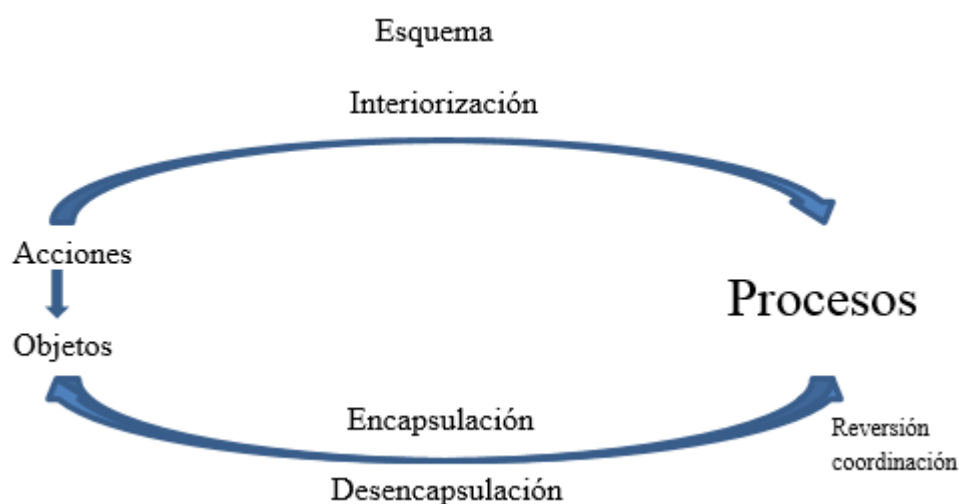


Figura 1. Teoría de APOE (basada en Asiala et al. 1996).

Descomposición Genética

“Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar para aprender un concepto matemático específico. Por lo general, comienza como una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la Teoría APOE, su conocimiento matemático, la investigación previamente publicada sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto. Hasta que se prueba experimentalmente, una descomposición genética es una hipótesis y se conoce como preliminar” (Arnon et al., 2014, p.27-28).

En resumen, una descomposición genética (DG) es una conjetura de construcciones mentales que los estudiantes pueden hacer para comprender un concepto matemático particular. Por otra parte, una DG no es una hipótesis única, sino que es una posible hipótesis que se pondrá a prueba de forma científica para probar como un individuo puede entender o aprender un concepto matemático de forma efectiva.

La (DG) se usa para desarrollar materiales pedagógicos y se pone a prueba analizando las respuestas de los estudiantes con diferentes instrumentos de investigación. Lo que generalmente sucede es que los estudiantes dan evidencia de hacer algunas construcciones mentales inesperadas y también muestran dificultades para usar algunas de las construcciones conjeturadas. Esto lleva a

revisar la DG para que refleje lo que los estudiantes pueden realmente hacer y a añadir más detalle en aquellas construcciones que causan dificultad. También lleva a diseñar materiales para ayudar a que los estudiantes hagan las construcciones conjeturadas, especialmente aquellas en que han mostrado dificultad. La (DG) juega un rol principal en sugerir las intervenciones del profesor en la discusión en clase y en el diseño de ejercicios.

Enseñanza utilizando el ciclo ACE

Según, Arnon et al. (2014), la implementación de la enseñanza utilizando la teoría APOE se lleva a cabo usando el Ciclo de Enseñanza ACE, un enfoque pedagógico que apoya el desarrollo de las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética.

“El Ciclo de Enseñanza de ACE es una estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) Actividades; (C) Discusión en clase; y (E) Ejercicios para hacer en el hogar” (Arnon et al., 2014, p.58). Según Arnon et al., (2014) en la primera etapa del ciclo, se implementan las actividades de aprendizaje donde los estudiantes en grupos comparten conocimientos en las tareas diseñadas con el propósito de que los estudiantes alcancen las construcciones mentales que fueron conjeturadas en la DG. El objetivo de las actividades de aprendizaje es fomentar la abstracción reflexiva y no soluciones mecánicas que pueden ser correctas en los algoritmos. Lo anterior se puede lograr si los estudiantes son expuestos con más

frecuencia a distintos diseños de actividades de aprendizaje que promuevan un razonamiento lógico de un concepto estudiado.

Según Arnon et al., (2014) la segunda fase del ciclo corresponde a la discusión de las actividades y la interacción en la discusión por parte del maestro investigador en la clase una vez que los estudiantes hayan completado las actividades en la fase “A”. El trabajo realizado por los estudiantes en las actividades de aprendizaje y las discusiones en clase le brindará la oportunidad de realizar una reflexión introspectiva sobre lo trabajado. Mediante la discusión guiada por el maestro investigador este puede aprovechar la oportunidad para presentarles definiciones de conceptos matemáticos, explicar con más detalles y profundidad las actividades y a su vez presentar un enfoque general para establecer relaciones sobre lo que presentaron y razonaron al trabajar las actividades.

Según Arnon et al., (2014) la tercera parte del ciclo consiste en la fase de ejercicios para hacer en el hogar que consta de ejercicios de práctica diseñados para reforzar o ampliar aún más el dominio del contenido matemático cubierto en las actividades de aprendizaje que fueron discutidas en clase por los estudiantes y el maestro investigador. Los ejercicios de práctica propician de forma continua el desarrollo de las construcciones mentales que fueron conjeturadas en la DG. Los ejercicios de práctica les sirven de guía a los estudiantes para que puedan aplicar los conocimientos de conceptos matemáticos adquiridos en actividades de

aprendizaje y a tomar en consideración ideas o aportaciones matemáticas relacionadas a los conceptos matemáticos que aportaron de forma cooperativa los participantes del grupo.

El Ciclo ACE y su relación con la descomposición genética se ilustran en la Figura 3.

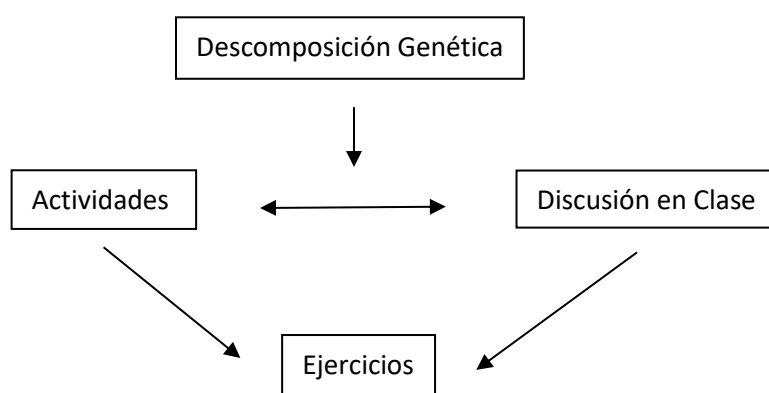


Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y una descomposición genética (Arnon et al., 2014, p.58).

La flecha desde la descomposición genética que se dirige a los cuadros de las fases del ciclo ACE ilustra que la DG afecta cada componente del ciclo de enseñanza ACE. La flecha bidireccional entre Actividades y Discusión en la sala de clases muestra que, las actividades son una de las herramientas principales para fomentar la discusión en la clase y por otra parte, que la discusión en la sala de clase les brinda una oportunidad para que cada estudiante lleve a cabo una reflexión introspectiva sobre lo aprendido en las actividades. Las flechas a los Ejercicios de Actividades y Discusión en la sala de clases ilustran el objetivo

principal de la fase de ejercicios para hacer en el hogar, que consiste en propiciar en los estudiantes un refuerzo en las construcciones mentales que estos han desarrollado o están en proceso de desarrollar durante el trabajo realizado en las actividades y su participación durante la discusión de estas en la sala de clases. (Arnon et al., 2014).

La no linealidad de una descomposición genética y la construcción de un concepto matemático

Dubinsky (1991) planteó que la construcción de un concepto matemático no es lineal. Sin embargo, la construcción mental de un concepto matemático al ser descrita mediante la teoría APOE se presenta de forma jerárquica. La construcción mental de un concepto matemático dependerá de las conexiones que el individuo pueda llevar a cabo mediante las estructuras mentales básicas o avanzadas que posea.

Arnon et al., (2014) enfatizaron que una DG no necesariamente refleja las diferentes trayectorias que un estudiante puede llevar a cabo para aprender el concepto matemático. Ellos argumentaron que las descripciones que se hacen en la DG no reflejan la posibilidad de diferentes trayectorias que incluyen arranques, paradas y discontinuidades que pueden ocurrir en el aprendizaje de un concepto matemático. Los autores enfatizaron que la teoría APOE no descarta las posibilidades de que un individuo una vez haya desarrollado las estructuras mentales para la construcción de un concepto matemático, no siempre este las va

a aplicar cuando se le requiera en una actividad de aprendizaje. El individuo las puede aplicar en diferentes episodios en distinto orden.

La teoría APOE reconoce que un estudiante puede seguir diferentes caminos de aprendizaje o seguir diferentes trayectorias. A pesar de las diferencias individuales, una descomposición genética describe las estructuras que un estudiante puede construir en su aprendizaje de un concepto.

Ciclos de investigación en APOE

Los ciclos de investigación y el refinamiento de una descomposición genética (DG) mediante la construcción y el perfeccionamiento de actividades de aprendizaje son fundamentales en la metodología de investigación de la teoría APOE. A través de los ciclos se va refinando un modelo inicial sobre las construcciones mentales que puede realizar un individuo de un concepto matemático (DG). Las actividades que se utilizarán para poner a prueba la DG se ajustarán a las necesidades de los estudiantes para que puedan alcanzar los Procesos conjeturados en la DG.

La investigación comienza en la teoría APOE con una conjetura preliminar (DG1) en un primer ciclo de las construcciones mentales que los estudiantes pueden llevar a cabo para comprender un concepto matemático. La conjetura de la (DG1) se puede basar en la experiencia de un maestro investigador, cualquier data que esté disponible, y los resultados de estudios de otros investigadores en la sala de clases sobre un concepto matemático. La (DG1)

o conjetura en un primer ciclo en la teoría APOE se puede poner a prueba mediante las entrevistas semi-estructuradas (EE1) que se hacen a los estudiantes participantes en el primer ciclo de un estudio. Según los investigadores Martínez-Planell & Trigueros (2019), lo que comúnmente ocurre es que los estudiantes en el ciclo de investigación facilitarán evidencias de haber realizados construcciones mentales inesperadas y por otra parte pueden dar evidencia de las dificultades que confrontaron para desarrollar o alcanzar algunas de las construcciones conjeturadas. Esta metodología permite el refinamiento de la DG (DG2) en un segundo ciclo de investigación en la teoría APOE, para modificar las conjeturas previas de forma tal que puedan facilitar mejor las construcciones mentales que los estudiantes pueden hacer sobre un concepto matemático. La DG refinada (DG2) que se pondrá a prueba en un segundo ciclo de investigación servirá de guía para el diseño de las actividades de aprendizaje de los estudiantes (DMD2) para ayudarlos a hacer las construcciones mentales donde han presentado dificultades en el ciclo 1.

Lo antes expuesto explica en detalles el final de un ciclo de investigación en la teoría APOE y a su vez el comienzo de un siguiente segundo ciclo y posiblemente más ciclos de investigación hasta poder alcanzar la estabilidad en las construcciones mentales de los estudiantes de un concepto matemático (ver Figura 3).

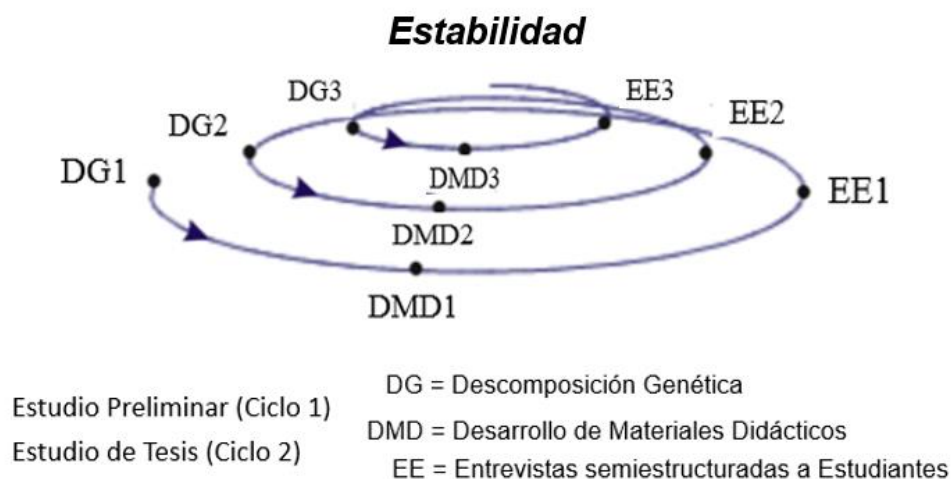


Figura 3. Ciclos de investigación en APOE

Finalmente, con la continuación de las interacciones de estos ciclos de investigación se obtendrá una DG que será estable. Esto quiere decir que no se pueden esperar refinamientos que sean significativos de estudios de investigación posteriores de tal manera que esta sirva para predecir las construcciones mentales que los estudiantes pueden hacer para comprender un concepto matemático y a su vez la misma servirá como guía para la enseñanza del concepto matemático.

Esta tesis corresponderá a un segundo ciclo de investigación con APOE.

2.1.2 Teoría de zona de desarrollo próximo de Lev Semionovitch

Vigotsky

Vigotsky (1978), hace referencia que “Para llegar a una solución del problema es harto compleja. Consiste en dos salidas separadas, primero, la relación general entre aprendizaje y desarrollo; segundo los rasgos específicos de

dicha relación cuando los niños alcanzan la edad escolar” (Vigotsky, 1978, p. 130). “Para poder elaborar las dimensiones de aprendizaje escolar, describiremos a continuación un nuevo concepto excepcionalmente importante, sin el cual no puede resolverse el problema: la zona de desarrollo próximo” (Vigotsky, 1978, p. 131).

Vigotsky (1978), expone que “El nivel de desarrollo real caracteriza el desarrollo mental retrospectivamente, mientras que la zona de desarrollo próximo caracteriza el desarrollo mental prospectivamente. La zona de desarrollo próximo proporciona a los psicólogos y educadores un instrumento mediante el cual pueden comprender el curso interno del desarrollo. Utilizando este método podemos tomar en consideración no sólo los ciclos y procesos de maduración que ya se han completado, sino también aquellos que se hallan en estado de formación, que están comenzando a madurar y a desarrollarse. Así pues, la zona de desarrollo próximo nos permite trazar el futuro inmediato del niño, así como su estado evolutivo dinámico, señalando no solo lo que ya ha sido completado evolutivamente, sino también aquello que está en curso de maduración” (Vigotsky, 1978, p. 134).

Vigotsky (1978), argumenta que “La zona de desarrollo próximo puede convertirse en un concepto sumamente importante a lo que a la investigación evolutiva se refiere, un concepto susceptible de aumentar la efectividad y utilidad de la aplicación de diagnósticos de desarrollo mental en los problemas

educacionales” (Vigotsky, 1978, p. 135). Vigotsky (1978), concluye que “Así pues, la noción de una zona de desarrollo próximo nos ayuda a presentar una nueva fórmula, a saber, que el “buen aprendizaje” es sólo aquel que precede al desarrollo. Tales observaciones llevaron a Piaget a la conclusión de que la comunicación provoca la necesidad de examinar y confirmar los propios pensamientos, proceso que es característico del pensamiento adulto. Piaget ha puesto de manifiesto que la cooperación suministra las bases del desarrollo de razonamiento moral del niño. Lo que crea la zona del desarrollo próximo es un rasgo esencial de aprendizaje; es decir, el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos capaces de operar sólo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante. “Una vez se han internalizado estos procesos, se convierten en parte de los logros evolutivos independientes del niño” (Vigotsky, 1978, p. 138). El proceso evolutivo va al remolque del proceso de aprendizaje; convierte la zona de desarrollo próximo.

Vigotsky planteó que está demostrado que las capacidades de un estudiante ubicado en el mismo nivel de desarrollo mental para aprender guiado por un maestro son totalmente diferentes entre cada uno de los estudiantes porque está comprobado que no todos los niños tienen la misma edad mental, aunque su edad cronológica sea la misma. Este planteamiento de Vigotsky en su teoría tiene como consecuencia que el ritmo de aprendizaje de cada estudiante sea totalmente

distinto. Según lo planteado en esta teoría puedo destacar que la cultura matemática que tiene cada estudiante en una sala de clases es totalmente diferente, aunque tengan la misma edad cronológica y estén ubicados en un mismo nivel de enseñanza. Cada estudiante pudo haber sido educado en ambientes distintos y con diferentes maestros de matemáticas cuyas estrategias y niveles de enseñanza de conceptos matemáticos fueron distintos. Esta diferencia entre edades mentales entre los estudiantes fue lo que Vigotsky llamó la zona de desarrollo próximo. Vigotsky explica a través de su teoría que es la distancia que hay entre el conocimiento que pudo desarrollar el estudiante a un nivel real determinado por la capacidad que tuvo ese estudiante para poder resolver un problema de forma independiente versus el desarrollo completo del aprendizaje que puede obtener un estudiante mediante la resolución de problemas bajo la instrucción o mentoría de un maestro adulto o en grupos colaborativos con otros compañeros de estudios más capaces en el solución de problemas.

La tercera teoría utilizada en esta investigación es la Teoría AiC (Abstracción en Contexto) que se describe y analiza mediante el modelo de acciones epistémicas (Modelo RBC + C) de Dreyfus et al. (2015).

2.1.3 Teoría sociocultural (Modelo de acciones epistémicas - Modelo RBC + C) de Dreyfus et al. (2015)

Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (2015) desarrollan la abstracción en contexto (AiC) como un marco teórico para estudiar los procesos de los

estudiantes de construir conocimiento matemático abstracto tal como ocurre en un contexto que incluye componentes matemáticos, curriculares y sociales específicos, así como un entorno de aprendizaje particular. La aparición de construcciones que son nuevas para un estudiante se describe y analiza, de acuerdo con AiC, mediante un modelo con tres acciones epistémicas observables: “Reconocer”, “Construir-con” y “Construir” – el modelo RBC (del inglés: “recognize”, “build”, “construct”). Si bien forma parte del marco teórico, el modelo RBC también sirve como la principal herramienta metodológica de AiC.

Según Dreyfus et al. (2015) en las salas de clases, la abstracción a menudo se lleva a cabo en pequeñas comunidades de aprendizaje de dos a ocho estudiantes por grupo. Por lo tanto, los autores en referencia se enfocan en grupos pequeños, así como en los estudiantes, y dos aspectos bidimensionales son parte de los objetivos de su enfoque: por un lado, los autores observan los conocimientos o significados de conceptos matemáticos que comparten los estudiantes de forma sociocultural para ellos tomar en consideración que estructuras mentales o mecanismos de aprendizaje utilizan estos para continuar construyendo más sus conocimientos sobre un concepto o tópico matemático de forma colaborativa (Hershkowitz et al. 2007).

AiC adopta los puntos de vista de la matematización vertical y el ascenso al concreto y se basa en ellos para definir la abstracción como un proceso de reorganización vertical de algunas de las construcciones matemáticas anteriores

del alumno dentro de las matemáticas y por medios matemáticos para conducir a una construcción que sea nueva para el alumno.

Según Dreyfus et al. (2015), definen la teoría AiC como un modelo teórico-metodológico, según el cual la aparición de una nueva construcción se describe y analiza mediante tres acciones epistémicas observables: “reconocer” (R), “construir-con” (B) y “construir” (C). *Reconocer* tiene lugar cuando el alumno reconoce que una determinada *construcción* de conocimientos previos es relevante para el problema que está tratando. *Construir con* es una acción que comprende la combinación de constructos *reconocidos*, con el fin de lograr un objetivo localizado, como actualizar una estrategia o justificación o resolver un problema. El modelo sugiere *Construir* como la acción epistémica central de la abstracción matemática. La edificación consiste en ensamblar e integrar construcciones anteriores por matematización vertical para producir una nueva construcción. Se define a la primera vez que el aprendiz expresa la nueva construcción. No se refiere a que la construcción va a estar libre y flexiblemente disponible para el estudiante. Estar libre y flexiblemente disponible es parte de la *consolidación del constructo*, como se discutirá más adelante (Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B., 2007).

“Consolidar” es un proceso interminable a través del cual los estudiantes se dan cuenta si su construcción, el uso de la construcción, se vuelve más inmediato y evidente, la confianza del estudiante en usar la construcción aumenta,

y el estudiante demuestra más y más flexibilidad al usar la construcción (Dreyfus y Tsamir, 2004). La consolidación de una construcción es probable que ocurra siempre que una construcción que surgió en una actividad se incorpore en otras actividades, posiblemente en el curso de una acción de construcción adicional. Estas actividades adicionales pueden conducir a nuevas construcciones. Por lo tanto, la consolidación conecta sucesivas acciones de construcción y está estrechamente relacionada con el diseño de secuencias de actividades.

En los procesos de abstracción, las acciones epistémicas están anidadas. Las acciones C dependen de las acciones R y B; las acciones R y B son los componentes básicos de la acción C; al mismo tiempo, la acción C es más que la colección de todas las acciones R y B que componen la acción C, en el mismo sentido que el todo es más que la suma de sus partes. La acción C extrae su poder de las conexiones matemáticas, que unen estos bloques de construcción y los convierten en una sola unidad. Es en este sentido que se dice que las acciones R y B son constitutivas y anidadas en la acción C. De manera similar, las acciones R están anidadas dentro de las acciones B, ya que “construir-con” una construcción previa requiere reconocer esta construcción, al menos de manera implícita.

Además, una acción C de nivel inferior puede estar anidada en una más global, si la primera se realiza por el bien de la segunda. Estas acciones epistémicas anidadas antes mencionadas se observan en las salas de clases y en las entrevistas semiestructuradas que se les administran a los estudiantes en un estudio en las que

se estudia la abstracción. Dadas estas características, los autores en referencia llaman al modelo de abstracción de acciones epistémicas dinámicamente anidadas en contexto, más simplemente el modelo RBC, o el modelo RBC + C usando la segunda C para señalar el importante papel de la consolidación. Si se logra adaptar el modelo RBC +C en APOE para ser usada como herramientas metodológicas puede crear un nuevo instrumento para recolectar y analizar datos, particularmente cuando se estudia el crecimiento de conocimiento a través de la interacción de individuos y no solamente un individuo aislado.

Si comparamos la metodología RBC+C de la teoría Abstracción en Contexto (AiC) con la teoría APOE, “reconocer” (R) se refiere a que un individuo reconoce o lleva a cabo acciones que tienen que ver con los prerequisites conjeturados en una DG. “Construir-con” (“build”; B) lo interpretamos como llevar a cabo Acciones que eventualmente puedan ser interiorizadas en un Proceso. “Construir” (“construct”; C) es una actividad del individuo en la cual se reconocen características consistentes con un Proceso tales como: conversiones (entre representaciones numérica, tabular, verbal, algebraica, o gráfica), generar imagen dinámica, justificar, omitir pasos y anticipar resultados, revertir, o coordinar, cuando la característica aparece por primera vez. “Consolidar” (+C) es cuando un individuo puede aplicar un Proceso ya construido en un contexto nuevo (que puede ser un problema nuevo). O sea, cuando da evidencia de haber

encapsulado un Proceso y hacer acciones sobre él. Esto tiene que ver con la construcción de Objetos.

2.1.4 Resumen

Haciendo un análisis de estas tres teorías (Figura 5) se inicia la descripción partiendo de la Teoría Epistemológica del conocimiento basada en la idea de abstracción reflexiva de Jean Piaget, que este consideró tanto el mecanismo principal para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento como el mecanismo por el cual todas las estructuras lógico – matemáticas se desarrollan en la mente de un individuo. Utilizando la noción de abstracción reflexiva, Dubinsky propuso la teoría APOE para describir como las acciones son interiorizadas en procesos que se encapsulan en objetos mentales, para, finalmente, construir esquemas cognitivos más sofisticados. La teoría de la zona de desarrollo próximo de Vigotsky le facilita al maestro o investigador un instrumento para este poder comprender el curso del aprendizaje interno que puede estar desarrollando un estudiante cuando aprende un concepto matemático. Lo antes expuesto se asemeja a la Teoría APOE porque un maestro o investigador puede utilizar no sólo los ciclos y procesos de maduración que ya un estudiante haya completado sino aquellos que se encuentran en una etapa de formación, que están comenzando a madurar o a desarrollarse en los procesos de aprendizaje que lleva a cabo un estudiante. Por ende, la zona de desarrollo próximo permite al maestro o investigador trazar una proyección futura de aprendizaje del estudiante.

Esto es similar a lo que expuso Dubinsky sobre el diseño de una Descomposición Genética (DG) de un concepto matemático, así como la evolución de un aprendizaje dinámico, tomando en consideración no sólo aquel aprendizaje que ha adquirido y completado por el estudiante de forma evolutiva, sino que también se estará tomando en consideración aquellos procesos mentales del aprendizaje de un concepto que está en curso para que sean madurados por el estudiante en otra etapa siguiente.

Cónsono con lo que expone Vygotsky en su teoría de la zona de desarrollo próximo, Piaget expone que la enseñanza cooperativa entre un maestro y estudiantes que han alcanzado el nivel máximo de aprendizaje para resolver un problema sienta las bases de desarrollo moral del estudiante. Esto trae como resultado que el aprendizaje en el estudiante vaya fomentando una serie de procesos evolutivos de aprendizaje internos que son capaces de operar o ejecutarse cuando el estudiante está interactuando en cooperación con un compañero estudiante con dominio de contenido o destrezas de un concepto bajo estudio o con grupos cooperativos de estudiantes en la sala de clases que puedan ayudar al estudiante a reforzar el dominio de un concepto o destrezas bajo estudio.

La teoría AiC (Abstracción en Contexto) es de gran utilidad en este estudio porque se puede utilizar para estudiar la interacción entre estudiante y el profesor. Por otra parte, se puede utilizar esta teoría para estudiar la interacción entre estudiante y estudiante. El mayor beneficio para este estudio del modelo de

la teoría AiC es que permite integrar la teoría de Vygotsky (1978), Zona de Desarrollo Próximo, a APOE.

En la Figura 4 se presenta un diagrama que recoge la interacción de las teorías con las variables de interés y su descripción.

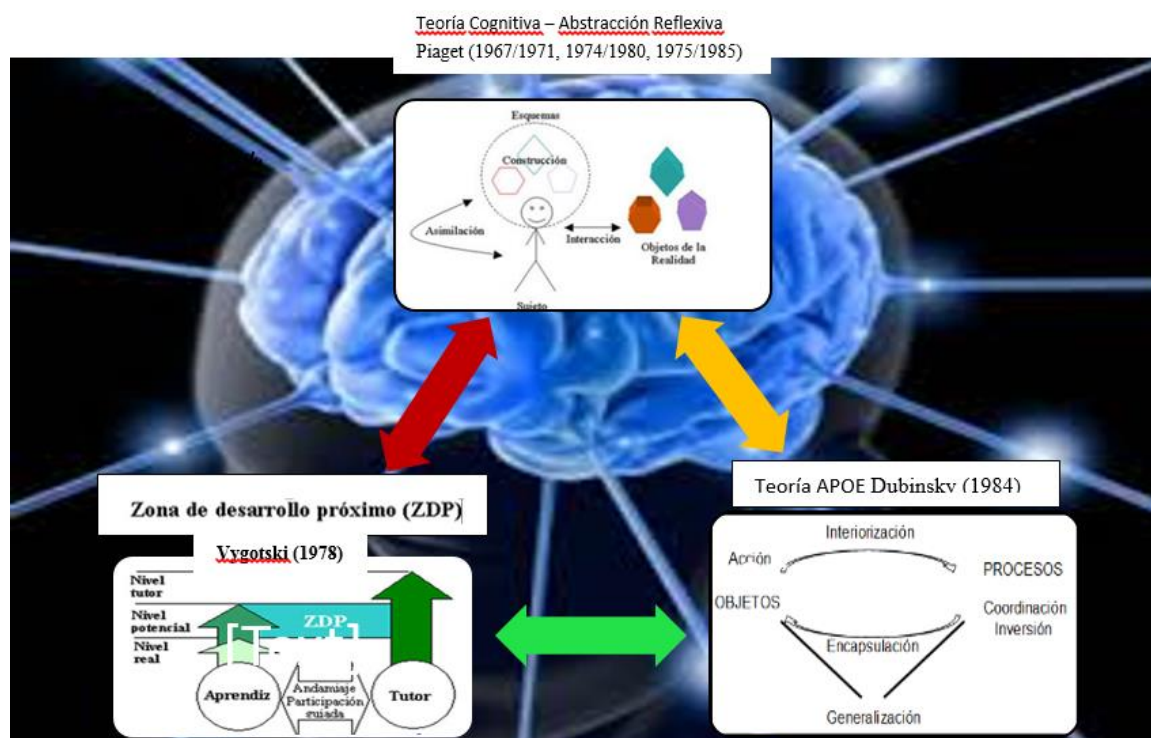


Figura 4. Diagrama que recoge la interacción de las teorías con las variables de interés y su descripción.

2.2 Literatura científica

Confrey y Smith (1994) investigan el entendimiento de función exponencial basándose en la covariación discreta, eso es, considerando tablas donde las entradas cambian por “unidad” y las salidas correspondientes por una “tasa” constante. Eso los lleva a una discusión epistemológica sobre la

comprensión de los conceptos tasa y unidad que se basa en múltiples enfoques. En su estudio, Confrey y Smith (1994) se formularon dos conjeturas. La primera conjetura se basó en que una tasa se puede entender de forma inicial como una comparación de unidad por unidad. La segunda se basó en que una unidad es la relación invariante entre un predecesor y su sucesor. Basándose en estas dos conjeturas, los autores en referencia realizaron una descripción de varias unidades multiplicativas para luego proponer tres métodos diferentes para entender la tasa de cambio en funciones exponenciales.

Confrey y Smith (1995) utilizaron la operación multiplicativa primitiva que llaman subdivisión (“splitting”) y la visión de covariación de funciones para argumentar que la yuxtaposición de secuencias aditivas y multiplicativas puede conducir a un enfoque eficaz de funciones exponenciales. Ellos discuten la "interpolación en los mundos de contar y subdividir" para extender funciones exponenciales de los números enteros positivos a los números racionales. Sus propuestas se reflejan en varios estudios posteriores que sugirieron la construcción de una función exponencial a partir del razonamiento covariacional discreto y acercándose al razonamiento covariacional continuo a medida que el conjunto de exponentes se vuelve denso en la recta real.

K. Weber (2002) investigó los modelos matemáticos de funciones exponenciales y logarítmicas. En ese artículo propuso una técnica de instrucción alternativa diseñada para enseñar a los estudiantes sobre exponentes y logaritmos

y llevó a cabo un estudio piloto para probar la efectividad de esta instrucción. Partiendo del trabajo teórico de Dubinsky (1991) y Sfard (1991), postuló un conjunto de construcciones mentales que un alumno podría realizar para comprender los conceptos de exponentes y logaritmos. Luego describió ejercicios de computadora y de papel y lápiz para inducir a los estudiantes a hacer estas construcciones. Presentó un estudio piloto que evaluó la eficiencia de estos ejercicios. Los estudiantes que recibieron la instrucción por medio del tratamiento en el estudio superaron a los que recibieron instrucción tradicional en una variedad de medidas que incluyeron realizar cálculos básicos, recordar fórmulas, explicar por qué las reglas de exponentes y logaritmos son ciertas, y responder preguntas conceptuales. Weber, señala que ha encontrado pocas investigaciones sobre las funciones exponenciales y logarítmicas en la literatura de educación matemática.

Kenny (2005) investigó cómo los estudiantes universitarios interpretaban la notación logarítmica y como estas interpretaciones informaban a los estudiantes sobre las reglas para trabajar con ecuaciones logarítmicas. El autor en referencia expuso que para que los estudiantes comprendan la notación de función logarítmica, estos tienen que ser capaz de interpretar los símbolos que utilizan como expresión del objeto de un logaritmo y como una indicación del proceso necesario para trabajar con la función. Kenney (2005) halló que los estudiantes a menudo malinterpretan la notación utilizada en funciones exponenciales y

logarítmicas y se convierte en un obstáculo para su comprensión conceptual de estas funciones. Según este autor, los estudiantes luchan por comprender el concepto de funciones inversas y logaritmos y con los procedimientos para resolver ecuaciones logarítmicas.

Garsow (2010) expuso en su disertación que tanto Thompson (1994b), y Confrey y Smith (1994, 1995) describen cómo se podría enseñar a los estudiantes a construir “formas de pensar” sobre el comportamiento exponencial coordinando la covariación de dos cantidades cambiantes. Confrey y Smith (1994) abogaron por comenzar con cambios aditivos y multiplicativos discretos, mientras que Thompson (1994b) abogó por comenzar con variación continua. El estudio de Garsow (2010) investigó las cuestiones de cómo los estudiantes realmente razonaban covariacionalmente y cuáles fueron las consecuencias de su razonamiento en las matemáticas que involucran funciones exponenciales. El propósito del estudio de Garsow (2010), basado en un experimento de enseñanza, fue identificar las operaciones de razonamiento covariacional que los estudiantes usaban y las consecuencias de ese razonamiento para las matemáticas que implican un crecimiento exponencial. Como resultado de su estudio, Garsow (2010) identificó dos formas de pensar sobre el cambio que difieren de la dicotomía discreta/continua anterior: pensar en cambios completos “por pedazos” (Chunky) o que se “ven los pedazos como un cambio suave” (Smooth) en progreso. Garsow identificó cinco formas diferentes de entender el crecimiento

exponencial: geométrico, compuesto, diferencial, armónico y estocástico. Basado en los resultados de su estudio, Garsow sugirió que la comprensión profunda del crecimiento exponencial no proviene del dominio de una sola forma de pensar, sino de un cambio rápido y fluido entre varias formas de pensar.

Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra y Méndez-Guevara (2016) se basaron en las ideas de Confrey y Smith (1994, 1995) y Weber (2002) para diseñar actividades que ayuden a los estudiantes a yuxtaponer una secuencia aditiva de entradas (exponentes: $1, 2, \dots, n \dots$) y una secuencia multiplicativa de salidas (potencias de una base dada: $b^1, b^2, \dots, b^n, \dots$) y pensar en la exponenciación como un Proceso. Ferrari-Escolá et al. (2016), utilizó conjuntos de tarjetas de la forma² (n/y) donde n es un número entero positivo y , $y = 2^n$, y donde podría faltar y o n , y pidió a los estudiantes que las ordenaran, encontraran tarjetas faltantes o porciones de tarjetas y encontraran una operación entre pares de cartas que daría como resultado otra carta del conjunto. Inspirados en el desarrollo histórico de los logaritmos, también sugirieron que los estudiantes pueden

² Usaremos la notación $(n | y)$ para referirnos a una tarjeta de la forma $\begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}$ donde n es un exponente entero positivo y y es una potencia que puede estar (pero no está) escrita en la forma b^n , para alguna base b . Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ es una carta en el juego base 2.

descubrir la operación de multiplicar (la parte superior de dos cartas cualesquiera (n/y)) sumando (la parte inferior de las cartas (n/y)) y dividir restando, lo que conduce a las reglas de las funciones exponenciales y logarítmica. Al invertir lo que se considera como variable independiente y dependientes (parte superior o parte inferior de las tarjetas), los estudiantes pueden relacionar funciones exponenciales con sus inversas logarítmicas. Sin embargo, no utilizaron estos materiales para extender funciones exponenciales a los números reales y así promover el razonamiento logaritmo – exponencial continuo, o para introducir logaritmos.

Ellis, et al. (2016) establecieron que la educación de los estudiantes en cuanto a la comprensión del crecimiento exponencial resulta ser desafiante. Los autores en este estudio identificaron nuevos cambios para mejorar el aprendizaje de los estudiantes; ellos presentaron la necesidad de comprender mejor que estrategias de enseñanza puede fomentar el aprendizaje y la comprensión del crecimiento exponencial. Los autores plantearon que una trayectoria de aprendizaje, que denominaron *Exponential Growth Learning Trayectory* (EGLT), explicaba el aprendizaje y el razonamiento que llevaban a cabo los estudiantes en un conjunto de actividades diseñadas para crear un entendimiento de crecimiento exponencial como una relación entre dos cantidades que cambian covariacionalmente. En el estudio (Ellis, et al. 2016), presentaron la trayectoria de aprendizaje de tres estudiantes mostrando como fueron progresando en su

entendimiento de crecimiento exponencial. Los investigadores diseñaron una situación en contexto para que los estudiantes pudieran explorar dos cantidades continuamente covariantes. En cuanto a las trayectorias individuales de los estudiantes, los estudiantes comenzaron con razonamiento prefuncional. Los tres estudiantes progresaron de manera similar en las etapas principales de la trayectoria de aprendizaje; las diferencias individuales aparecieron en (a) el grado en que los estudiantes podían participar en razonamiento de covariación, y (b) la prevalencia y el momento del desarrollo de razonamiento por correspondencia (razonamiento basado en fórmulas). Según Ellis et al. (2016), el progreso de los estudiantes no reflejó el entendimiento que se suponía que las tareas provocarían, pero los autores pudieron observar las perspectivas de covariación y correspondencia desarrollándose en conjunto. Basándose en los resultados de su estudio, Ellis et al. (2016) sugirieron que la ubicación de una exploración de crecimiento exponencial en un escenario en el que los estudiantes pueden manipular cantidades continuamente covariantes en un entorno dinámico puede fomentar su capacidad para coordinar el crecimiento multiplicativo en y con crecimiento aditivo en x , un elemento clave para comprender la naturaleza del crecimiento exponencial. Otro hallazgo del estudio fue que el pensamiento covariacional temprano de los estudiantes precedió a su habilidad para desarrollar reglas de correspondencia de forma $y = f(x)$. Ellis, et al. (2016) expusieron que *EGLT* ofrece una prueba de concepto de que incluso con una relativa falta de

sofisticación algebraica, los estudiantes de la escuela intermedia pueden generalizar su comprensión del crecimiento exponencial para ver b^a como una cantidad de factores de b , incluso para valores no naturales de a . Los hallazgos de los investigadores sugirieron que el razonamiento con cantidades covariantes es un aspecto crítico de la construcción de esta comprensión particular del crecimiento exponencial. Los investigadores en referencia utilizaron como contexto para este estudio una planta de cactus que ellos llamaron el Jactus que crecía exponencialmente como función del tiempo. Aunque el contexto de Jactus introdujo algunas limitaciones, particularmente en términos de limitar el factor de crecimiento a cuatro o menos para permitir números lo suficientemente pequeños que se pudieran ajustar a las ventanas de las calculadoras de los estudiantes, consideraron las restricciones aceptables porque el escenario de Jactus ofrecía un contexto en qué estudiantes podrían tener un sentido significativo de exponentes no naturales imaginando la altura de la planta que crece con el tiempo. Sin embargo, la capacidad de los estudiantes de ver una imagen de una planta creciendo sin problemas con el tiempo no significa que lograron un pensamiento de variación continua suave. Los autores concluyeron que los datos también indicaron que los estudiantes al trabajar en contextos continuos no garantizaron un razonamiento de forma continua.

Alagic y Palenz (2016), plantearon “que estudios recientes con estudiantes de nivel secundario revelan un desafío en la instrucción para que los estudiantes

puedan hacer cambios de estudiar representaciones lineales a representaciones exponenciales y a su vez distinguir qué características deben estar presentes para que un conjunto de datos sea exponencial”. Las investigaciones reflejan que los maestros entienden el crecimiento exponencial como una multiplicación repetida, pero luchan para relacionar esta comprensión con el modelo matemático para reconocer el crecimiento exponencial en situaciones naturales reales y para generar reglas generales apropiadas de exponentes tales como: regla del producto para exponentes, regla del cociente para exponentes y regla de la potencia para exponentes (Davis, 2009; Prezmeg & Nenduardu, 2005; Strom, 2006, 2008). Considerando otra población, Davis (2009) planteó, que los futuros maestros que participaron en su estudio presentaron limitaciones o dificultades para poder anticipar que herramientas de apoyo necesitan los estudiantes para aprender sobre las propiedades de las funciones exponenciales.

Para hacer que los logaritmos como números y operadores sean significativos y, por lo tanto, más accesibles para los alumnos, C. Weber (2016) identificó en su estudio varios modelos básicos (*Grundvorstellungen*; vom Hofe & Blum, 2016) para fomentar el aprendizaje de logaritmos. Para mejorar teóricamente la accesibilidad del concepto logarítmico, la construcción de “*Grundvorstellungen*” se combina con otra construcción teórica, a saber, la de operacionalidad y estructuralidad, que enfatiza la importancia de los enfoques operativos en el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos (Sfard 1991,

2008). Después de examinar varias conceptualizaciones de logaritmos y analizar las dificultades de algunos estudiantes para graficar funciones logarítmicas, Weber propuso cuatro modelos básicos con respecto a su poder explicativo para graficar funciones logarítmicas: *el uso de la historia, uso de lenguaje y alternativas de notación, cálculo manual de logaritmos, uso de diferentes conceptualizaciones y aplicaciones*. Weber (2016) expuso que pocos de los enfoques alternativos se han sometido a una evaluación cuantitativa sistemática o investigación cualitativa, por lo que hay pocos datos empíricos sobre el aprendizaje de los estudiantes a los que se les enseñó utilizando estos enfoques. En resumen, C. Weber (2016) afirmó que la interacción entre los cuatro modelos básicos puede hacer que los logaritmos sean accesibles y fomentar la comprensión.

En otro artículo, C. Weber (2017) discutió que los logaritmos como funciones difieren de los logaritmos como números (por ejemplo, determinando $\log_2 1,024$) u operadores (por ejemplo, utilizando logaritmos para manipular expresiones y resolver ecuaciones), especialmente cuando se trata de enseñar y aprender (Confrey Smith, 1994).

Existen diversos estudios que reflejan un sinnúmero de errores de cálculo que cometen los estudiantes al llevar a cabo un razonamiento sobre expresiones o funciones exponenciales y logarítmicas (Berezovski, 2004; Hoon, Singh y Ayop, 2010; Liang y Wood, 2005). Investigaciones más recientes sobre este tema han

trascendido más allá del estudio de errores de cálculo en los estudiantes y se han enfocado en las dificultades conceptuales que presentan los estudiantes para comprender este tema (Berezovski, 2004; Cangelosi, Madrid, Cooper, Olson & Hartter, 2013; De Boock, van Dooren, Janssens, & Verschaffell, 2002; Liang & Wood, 2005; Strom, 2006; Wood, 2005).

Gruver (2018) expuso que diversas investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes del concepto de logaritmos muestran que estos tienen dificultad con la comprensión de este tópico. Los resultados del estudio que llevó a cabo Gruver (2018) proporcionó información sobre cómo abordar las dificultades que se reportaron en estudios anteriores. El autor en referencia describió un nuevo modelo que usó en su estudio: la recta numérica exponencial. Gruver propuso un problema a los estudiantes participantes donde les presentó una tabla con distintos eventos o periodos históricos representados en notación científica y en notación decimal para que localizaran los eventos en una recta numérica. Los eventos iban desde el Big Bang (hace aproximadamente 1.5×10^{10} años) hasta hoy en día. Los estudiantes realizaron varios intentos. En su primer intento, trataron de subdividir la recta de forma lineal, o sea, en intervalos que representaban la misma cantidad de tiempo. Luego de darse cuenta de que esto no les daba una solución satisfactoria, utilizaron multiplicación repetida para separar los intervalos de tiempo en la recta numérica en múltiplos de 10. Los estudiantes organizaron los eventos en intervalos con marcas 10^0 , 10^1 , ... 10^{10} ; luego pensaron en cómo

subdividir entre marcas para localizar cada fecha de cada evento o periodo. Luego de intentar una subdivisión lineal, por ejemplo, 10, 20, 30, ..., 100, se dieron cuenta que podían usar multiplicación repetida para obtener otra forma de subdividir, por ejemplo, $10^{1.1}$, $10^{1.2}$, ..., $10^{1.9}$, 10^2 . Los estudiantes se dieron cuenta de que podían hacer esta subdivisión entre marcas multiplicando por $10^{0.1}$ que es la raíz décima de 10; de aquí pasaron a discutir cómo localizarían potencias fraccionarias como por ejemplo $10^{2.6}$; de ahí observaron que el listado de los eventos históricos cambiaba linealmente (aditivamente), de uno en uno, mientras que en la recta exponencial cambiaban exponencialmente (geométricamente) multiplicando repetidamente por 10 (o por $10^{0.1}$ entre marcas). Luego de aquí pasaron a discutir logaritmos (como números) para hacer otras localizaciones de eventos en la recta exponencial. El objetivo principal de este experimento de diseño fue ayudar a desarrollar el aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto logaritmo.

Con el nuevo modelo de Gruver en este estudio se abordaron tres dificultades conceptuales. La primera dificultad conceptual, la diferenciación entre relaciones lineales y exponenciales, se trabajó directamente en el estudio cuando los estudiantes exploraron la forma de subdividir los segmentos en la recta numérica exponencial. La comunidad de aprendizaje también pudo progresar en la segunda dificultad, que era dar sentido a los exponentes racionales. La tercera dificultad lo fue interpretar un logaritmo como un número.

Kuper & Carson (2020) se cuestionaron: ¿Qué comprensión y habilidades de razonamiento desarrollan y usan los estudiantes durante una secuencia de instrucción exponencial y logarítmica destinada a ayudarles a adquirir un significado para la noción de logaritmo? Para contestar esta pregunta los investigadores llevaron a cabo dos experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000) consecutivos donde se concentraron en conocer el razonamiento que llevaban a cabo los estudiantes a través de su trabajo realizado en las actividades que fueron diseñadas para ayudarlos a entender logaritmos. Kuper y Carson (2020) se centraron en el significado que transmite la función logarítmica en contraste con la aplicación de la definición de Euler, que es un enfoque tradicional que se lleva a cabo en los currículos de Estados Unidos. Ellas, esencialmente modifican la idea del Jactus (que ahora llaman Sparky) de Ellis et al. (2016) introduciendo un lenguaje de n -plicar (*tuplings*) y períodos de n -plicación (*tuppling periods*) para ayudar a que el estudiante entienda la relación entre el mundo aditivo y el multiplicativo que se dan en las relaciones exponenciales y logarítmicas. Su estudio es un experimento de diseño donde proponen una trayectoria de aprendizaje basada en dos "entendimientos fundamentales" (*fundamental understandings*): una n -plicación seguida de una m -plicación es lo mismo que una nm -plicación; el exponente x en un factor de crecimiento b es el número de períodos de b -plicación. Las autoras argumentan

que estos entendimientos fundamentales ayudan a que los estudiantes entiendan logaritmos como números y así como las propiedades de logaritmos.

CAPÍTULO III: ACTIVIDADES Y METODOLOGÍA

Introducción

En este capítulo se describen las actividades y metodología del estudio de la tesis. Como es típico de un estudio que se base en la teoría APOE, se comenzó proponiendo una descomposición genética (DG) preliminar. Luego se describen materiales que, como parte de esta tesis, se desarrollaron para ayudar a que los estudiantes hicieran las construcciones conjeturadas en la DG preliminar. Estos materiales se usaron en un experimento de diseño con un grupo de estudiantes de secundaria. Solamente consideramos actividades que se implementaron en la sala de clases durante el estudio. Por motivos a contagios con Covid – 19 a causa de la pandemia no se pudieron implementar otras actividades que fueron diseñadas. En este capítulo también discutimos el grupo de estudiantes participantes de secundaria. Los datos para evaluar el aprendizaje de los estudiantes se obtuvieron usando grabaciones en audio del trabajo en grupo y las intervenciones del maestro durante las reuniones que se llevaron a cabo durante el experimento de diseño, y usando una entrevista semiestructurada cuando finalizó el experimento.

Este capítulo está segmentado en las siguientes secciones: **3.1 DG para el estudio de la tesis; 3.2 Actividades de aprendizaje; 3.3 Metodología:** diseño, técnicas de recolección de información, descripción de las técnicas, población, procedimientos, análisis; **3.4 Aspectos éticos; 3.5 Selección de los participantes** y plan de ejecución.

3.1. DG para el estudio de la tesis

La investigación en APOE comienza estableciendo una descomposición genética. Ésta es una conjetura preliminar que se usa para el diseño de actividades y el análisis de datos. La DG se basó en mi experiencia como maestro y estudios en la literatura, particularmente Weber (2002), Ferrari-Escolá et al. (2016) y Ellis et al. (2015, 2016). El primer ciclo de estudio o estudio preliminar se discute en Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022).

Nuestra hipótesis es que el uso de actividades de enseñanza diseñadas en base a la descomposición genética de funciones exponenciales que se presenta en la tesis, conjuntamente con la estrategia pedagógica ACE, permite que la mayoría de los estudiantes obtengan un entendimiento profundo de estas funciones. Por “entendimiento profundo” se quiere decir que la mayoría de los estudiantes van a poder construir procesos de las funciones exponenciales, como definido en la teoría APOE.

Comenzamos haciendo un listado de prerrequisitos que se asumía que los estudiantes ya conocían antes de estudiar funciones exponenciales. Luego de eso propusimos como hipótesis que el estudiante usaría multiplicación repetida para construir la función exponencial, primero en los enteros positivos, para luego, dividiendo repetidamente por el factor multiplicativo, extender la función exponencial a cero y a los enteros negativos. Coordinando funciones exponenciales en los enteros, con exponentes fraccionarios unitarios,

y propiedades de exponentes el estudiante podría extender función exponencial a los racionales. Parte de la hipótesis es que las actividades que se diseñaron de acuerdo a esta DG ayudarían a que los estudiantes hicieran estas construcciones.

La primera parte de la DG (conocimientos previos) trata de exponenciación. No pretendemos tener una DG que abarque todo sobre las nociones de funciones exponenciales.

Conocimientos previos para revisar o construir

1. Se necesita un proceso de exponentes enteros positivos. Para enteros positivos n y m , Acciones de expandir b^n y b^m como un producto de factores individuales b , y usar estas expansiones para explorar expresiones de la forma $b^n b^m$, b^n / b^m y $(b^n)^m$ y tratar de encontrar fórmulas correspondientes, se pueden interiorizar en un Proceso que permite a los estudiantes imaginar que para un entero positivo n , multiplicar un número b por sí mismo n veces da como resultado b^n y dar sentido a las propiedades de los exponentes $b^n b^m = b^{n+m}$, $b^n / b^m = b^{n-m}$, y $(b^n)^m = b^{nm}$.
2. Se necesita un Proceso de exponentes enteros. Acciones de explorar la validez de las expresiones $b^n b^m = b^{n+m}$, $b^n / b^m = b^{n-m}$, para los casos donde uno o ambos de n y/o m es cero, o donde $m = -n$ (en la primera expresión), $m = n$ o $m > n$ (en la segunda expresión) pueden interiorizarse en un Proceso que permita justificar las definiciones

$b^{-n} = 1/b^n$ y $b^0 = 1$ en términos de extender las propiedades de los exponentes positivos a los números enteros. La necesidad de realizar Acciones sobre el Proceso de exponentes enteros, por ejemplo, al construir función exponencial, fomenta su encapsulación en un Objeto de exponentes enteros.

3. Se necesita un Proceso de potencias fraccionarias unitarias para permitir que los estudiantes imaginen que para $a > 0$, y n entero positivo, $a^{1/n}$ es un número que multiplicado por sí mismo n veces da como resultado a . Para construir este Proceso: dado un número positivo a y un entero positivo (pequeño) n , la Acción de usar tecnología de computación para tantear numéricamente o para analizar geométricamente (intersecando las gráficas de $y = x^n$ y $y = a$, por ejemplo) y encontrar o aproximar un número que al multiplicarse por sí mismo n veces produce el número dado a , puede interiorizarse en un Proceso que permite al alumno imaginar y anticipar la existencia de tales números. Otras Acciones de usar tecnología para calcular potencias fraccionarias unitarias, verificar que efectivamente tengan la propiedad esperada y usarlas para resolver situaciones de problemas contextuales pueden ayudar a los estudiantes a encapsular el Proceso de potencias fraccionarias unitarias en un Objeto.

Función exponencial en los naturales (EN)

La acción de ordenar y completar espacios en blanco en pares ordenados correspondientes a una sucesión geométrica (n, s_n) (es decir, donde $s_n = b^n$ para n un entero positivo, algunos $b > 0$, $b \neq 1$, y donde s_n podría no estar expresado como una potencia), donde el factor multiplicativo común o la base b se da verbal o simbólicamente, o donde se dan dos términos consecutivos (n, s_n) y $(n+1, s_{n+1})$ para permitir encontrar el factor multiplicativo b , se puede interiorizar en un Proceso de multiplicación repetida (MR) que permite imaginar que (n) crece aritméticamente mientras que (s_n) crece geométricamente, permite relacionar n con s_n , y reconocer n como el número de veces que la base b es multiplicada por sí misma. En este momento, es posible que el estudiante no sepa que n es un exponente. Acciones de k -saltos a la derecha, es decir, completar algunos términos de sucesiones de la forma (n, s_n) , $(n+k, s_{n+k})$, $(n+2k, s_{n+2k}) \dots$ para k suficientemente grande que no es razonable hacer esto multiplicando repetidamente por b , puede hacer evidente la necesidad de la notación exponencial y así fomentar la coordinación del Proceso de multiplicación repetida (MR) con un Proceso prerequisite de exponentes enteros positivos para dar como resultado un Proceso de función exponencial en los naturales (EN), que permite reconocer a n (en pares (n, s_n)) como un exponente.

Extensión a los enteros (EZ)

La acción de usar multiplicación repetida para encontrar la parte que falta en el par ordenado $(0, ?)$ de forma tal que complete un conjunto dado de pares ordenados en una sucesión geométrica $(1, s_1), (2, s_2), (3, s_3), \dots$ mientras que también hace que esta extensión sea consistente con el Proceso de exponentes enteros, se pueden interiorizar en un Proceso que extiende el Proceso de función exponencial (FE) a cero. Acciones similares que extienden aún más la función a pares de la forma $(-1, s_{-1}), (-2, s_{-2}), (-3, s_{-3}), \dots$ se pueden interiorizar en un Proceso que extiende el Proceso de función exponencial en los naturales (EN) para formar un Proceso de función exponencial en los enteros (EZ). En este momento, el estudiante puede que no relacione los valores enteros negativos de n con exponentes enteros negativos. Acciones de k -saltos a la izquierda, es decir, completar algunos términos de sucesiones de la forma $(n, s_n), (n+k, s_{n+k}), (n+2k, s_{n+2k}), \dots$ partiendo de cualquier n , para k lo suficientemente grande como para que no sea razonable hacerlo dividiendo repetidamente por b , fomenta la coordinación de este Proceso (EZ) con el Proceso prerequisite de exponentes enteros para dar como resultado un Proceso, también llamado EZ, que reconoce que un entero negativo n en un par $(n, ?)$ es un exponente y que el par se completa de una manera consistente con propiedades de exponentes.

Extensión a los números racionales (EQ)

El Proceso de multiplicación repetida se coordina con un Proceso de potencias fraccionarias unitarias mediante la aplicación del primero al

encapsulamiento del segundo, para producir un Proceso de potencias fraccionarias repetidas. Este proceso permite pensar en $\underbrace{b^{1/n} b^{1/n} \cdots b^{1/n}}_{m \text{ veces}}$ como $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}$. La

Acción, que puede estar motivada por situaciones contextuales, que requieran que dados números a y c con $0 < a < c$ y un entero positivo (pequeño) n , encontrar un número b tal que multiplicar a por b , n veces produce c , ($c = ab^n$) puede fomentar esta coordinación. El proceso de potencias fraccionarias repetidas se puede coordinar con el Proceso de función exponencial en los enteros (EZ) para formar un nuevo Proceso que extiende EZ para incluir exponentes fraccionarios.

3.2 Actividades de aprendizaje

Para el estudio de tesis, se desarrolló un conjunto de seis actividades de aprendizaje para mejorar la comprensión de los estudiantes de las funciones exponenciales. El propósito del estudio de la tesis al implementar las actividades de aprendizaje era ver si las actividades tenían éxito en ayudar a que los estudiantes hicieran las construcciones mentales conjeturas en la DG. Los resultados de la tesis permitieron refinar aún más las conjeturas establecidas en la DG. La información que se obtuvo permitió obtener más información de los prerrequisitos que los estudiantes pueden necesitar, mejorar las actividades a usarse en futuros estudios, y establecer una descomposición genética refinada a usarse en futuros ciclos de investigación.

A causa de la pandemia, de las seis actividades de aprendizaje que se diseñaron para recopilar los datos en este estudio se utilizaron cinco y cuatro de ellas fueron editadas para que se pudieran implementar en un intervalo de tiempo de 90 minutos.

Las actividades del estudio de la tesis se relacionaron con el contenido cubierto en el curso de Precálculo, porque se estaban integrando a los tópicos de Funciones Exponenciales y Logarítmicas del Programa de Nivel Avanzado del curso de Precálculo en el Nivel Superior de una escuela privada en Puerto Rico. Las actividades se realizaron utilizando un manipulativo como se muestra en la Figura 8, con fichas que se asemejan una función como máquina.

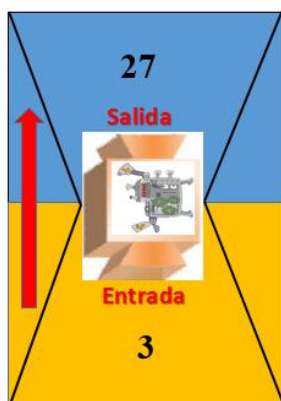


Figura 5. Manipulativo Ficha Representación Función como Máquina

De ahora en adelante esta ficha se va a denotar de la forma $\begin{bmatrix} 27 \\ 3 \end{bmatrix}$.

En cuanto al diseño de las actividades de aprendizaje que se utilizaron para probar las conjeturas establecidas en la DG sobre funciones exponenciales se utilizaron estas fichas, como en Ferrari – Escolá et al. (2016), donde la parte

inferior de la tarjeta contenía el exponente y la parte superior una base elegida elevada al exponente. En algunas actividades de aprendizaje sobre las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizó la calculadora gráfica TI – Nspire cx CAS. Hubo diferentes juegos de fichas que se asemejaban a una “función como máquina” (ver Figura 8) correspondiendo a diversas bases.

A continuación, damos un breve resumen de las actividades de aprendizaje que se implementaron en el estudio. Algunas se editaron para que pudieran ser implementadas en un intervalo de tiempo de 90 minutos aproximadamente. Las actividades se incluyen en su totalidad en un apéndice.

En la actividad # 0 se repasó notación exponencial.

En la actividad # 1 se les dió a los estudiantes fichas (ver Figura 8) que modelaban los datos de estimación de la altura en metros de un globo aerostático a medida que transcurre el tiempo de vuelo medido en minutos. Se les pidió a los estudiantes que ordenaran y completaran las fichas. Una ficha como $\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ diría que al transcurrir 3 minutos de vuelo (entrada) la altura de un globo aerostático era de 8 metros (salida). Se presentó el crecimiento exponencial como la multiplicación repetida por una constante (la base). Se presentaron tres ejemplos. En el primer ejemplo la altura de la cesta de un globo aerostático con respecto a la superficie de la tierra se duplicaba cada minuto de vuelo (base 2). En el segundo ejemplo tenían que hallar la base, que no era entero. En el tercer ejemplo la base era menor

de 1 por lo que se trató de un decrecimiento exponencial. Los ejemplos de la primera actividad trataron de “moverse hacia la derecha y hacia la izquierda en pasos unitarios”, como se describe en la DG. Luego de cada ejemplo los estudiantes tenían que contestar varias preguntas de análisis.

Ejemplo 1

Altura del globo aerostático en (metros)	1	2		8		32		128		512				
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3		5	6	7		9	10		13	14

Ejemplo 2

Altura del globo aerostático en (metros)	4	4.32	4.67	5.04								
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Ejemplo 3

Altura del globo aerostático en (metros)	1,724	1,206.8												
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

En la actividad # 2 se continuó con el contexto de la estimación de la altura en metros de un globo aerostático cuando transcurre el tiempo de vuelo medido en minutos, en este caso, considerando el “moverse a la derecha en saltos”, como se describe en la DG. Los estudiantes consideraron ejemplos como se muestran en las siguientes tablas. En el ejemplo 1 se le dijo que el factor multiplicativo por minutos de vuelo de la altura de un globo aerostático era de 1.05. También se aclaró que se estaba trabajando con un modelo matemático, por lo que no debería sorprenderlos que obtuvieran salidas que no fueran enteros. En el segundo ejemplo, se les dió la

forma de computar el factor de crecimiento por minutos y luego se les pidió el factor de crecimiento por horas de vuelo.

Ejemplo 1

Altura (metros)	16							
Tiempo (minutos)	0	1	15	30	45	60	75	90

Ejemplo 2

Altura (metros)	17	18.19							
Tiempo (minutos)	0	1	7	14	21	28	35	42	49

En la actividad # 3, todavía en el contexto de la estimación de la altura en metros de un globo aerostático cuando transcurre el tiempo de vuelo medido en minutos, se consideró la porción de la DG que trata de “moverse hacia la izquierda en pasos unitarios” con el fin de extender la definición de función exponencial a cero y los enteros negativos. Para ello se consideraron fichas como indican las siguientes tablas (donde la altura en metros de un globo aerostático se duplicaba a medida que transcurría un minuto de vuelo):

Altura (metros)					384
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4

Altura (metros)				24
Tiempo (minutos)	-3	-2	-1	0

Altura (metros)								4	8	16
Tiempo (minutos)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Luego de esto se incluyeron preguntas para reflexionar acerca de por qué las propiedades de exponentes obligan a que b^0 tiene que ser 1 y b^{-1} tiene que ser $1/b$. También se les dió fichas donde tenían que “dar saltos a la izquierda” como:

Altura (metros)				474.76			4,233	5079.60
Tiempo (minutos)	1	10	20	30	40	41	42	43

La actividad # 4 se diseñó para repasar el concepto de notación funcional. No damos más detalles de esta actividad porque no se implementó en la sala de clases en el estudio ya que los estudiantes demostraron en las actividades # 1 y # 2 tener noción de notación de función.

En la actividad # 5 se repasó exponentes fraccionarios unitarios y no unitarios. Se comenzó con la idea de que el estudiante pudiera imaginar la existencia de una potencia fraccionaria unitaria como el resultado de un proceso. Se hizo esto con ayuda de la calculadora TI-*nspire* cx CAS con preguntas tales como: ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo nos da 7?

Luego de eso se intentó de que el estudiante pudiera entender a la potencia $\frac{1}{n}$ de un número b como un número que multiplicado por sí mismo n veces produce b . Para ello se utilizaron preguntas tales como: En base a la forma en que se definió la potencia $\frac{1}{2}$, ¿qué debe ser la potencia $\frac{1}{3}$ de un número? En sus propias palabras, sin usar símbolos matemáticos, explique qué es una potencia $\frac{1}{5}$ de un número.

Se esperaba que el entendimiento verbal de potencias fraccionarias unitarias facilitara al estudiante que pudiera trabajar problemas tales como: Completa la sucesión de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número 3, ____, ____, ____, 9. Finalmente, antes de que la pandemia interrumpiera la investigación se pudo tratar el siguiente problema: Una cantidad de bacterias crece exponencialmente. ¿Si cada tres días la cantidad presente se multiplica por 16, por cuánto se multiplica la cantidad cada día? Verifica tu respuesta.

3.3 Metodología del estudio de tesis

3.3.1 Diseño

El estudio consistió en una investigación científica en el cual se utilizó el método de investigación cualitativa para un experimento de diseño con un diseño de estudio de caso instrumental.

Durante el año escolar 2021-2022, se seleccionó una escuela privada de nivel superior en Puerto Rico y un maestro colaborador para que participara en el estudio. Todos los nueve estudiantes de undécimo grado que estaban tomando el curso de Precálculo aceptaron participar voluntariamente. Sin embargo, un estudiante no culminó su participación en todo el estudio. Los ocho estudiantes que completaron su participación en el estudio son los que llamaremos estudiantes participantes del proyecto.

Los nueve estudiantes voluntarios participaron en el conjunto de cinco actividades distribuidas en 10 sesiones, cada sesión de 1.5 horas de duración. La implementación de las actividades de aprendizaje tomó 15 horas que se distribuyeron en tres semanas y media aproximadamente. La implementación de cada actividad de aprendizaje se realizó en 90 minutos del tiempo lectivo (1.5 horas) en un curso de Precálculo, que a su vez se dividió en dos intervalos de tiempo. Los primeros 50 minutos fueron utilizados por los estudiantes para realizar el trabajo y discusión del contenido de cada actividad de aprendizaje entre pares o en grupos y los últimos 40 minutos fue el tiempo que utilizaron los estudiantes y el maestro colaborador del estudio para la discusión de cada actividad de aprendizaje en clase. Cuando finalizó la implementación de todas las actividades de enseñanza en la sala de clases se les administró una entrevista semiestructurada a los estudiantes participantes del proyecto.

En las actividades, los estudiantes manipularon objetos físicos y mentales a través de preguntas orales, preguntas escritas que medían conocimiento y análisis, y preguntas que permitían la formulación de conjeturas matemáticas. El diseño de las actividades de aprendizaje le facilitó al estudiante poder probar si las conjeturas formuladas en las actividades fueron ciertas o falsas, permitiéndole así poder construir al estudiante su propio conocimiento mediante la investigación utilizando el paradigma constructivista. Las actividades de aprendizaje se elaboraron con materiales fáciles de usar destinados a promover el razonamiento

covariacional exponencial desde una perspectiva dinámica, centrada en la simultaneidad de progresiones aritméticas y geométricas. Además, en estas actividades de aprendizaje se estuvo integrando herramientas tecnológicas como el uso de la calculadora gráfica TI – nspire cx CAS.

El maestro colaborador que dictó el curso de Precálculo en la escuela superior privada de este estudio estuvo a cargo del proceso de administración de todas las actividades de enseñanza y ejercicios para hacer en el hogar. El investigador principal preparó una guía instruccional para que el maestro colaborador implementara las actividades diseñadas por el investigador de este estudio y trabajó de cerca con éste para velar que las actividades se implantaran como fueron diseñadas.

Antes de usarse, la entrevista semiestructurada, cinco actividades de aprendizaje, y cinco hojas de trabajo (ejercicios de práctica para hacer en el hogar) se sometieron a un panel de tres expertos (Doctores y Profesores Especialistas en Matemáticas con especialidad en la enseñanza de contenido del curso de Precálculo) donde establecieron la estabilidad y consistencia de los instrumentos o las medidas. Estos expertos analizaron e hicieron una serie de recomendaciones las cuales fueron tenidas en cuenta por el investigador y aquellas que se consideraron se incorporaron; luego de completarse la revisión de las actividades de aprendizaje, se volvió a someter a los expertos. Al finalizar este

procedimiento se validaron los instrumentos que se utilizaron en el estudio de tesis.

3.3.2 Técnicas de recolección de información

Las técnicas de recolección de información que se utilizaron en el estudio de tesis consistieron en: el trabajo escrito de los participantes en las cinco actividades de aprendizaje, grabaciones de voz de la implementación de las actividades de enseñanza, y grabaciones de voz de la entrevista semiestructurada. Todos los datos que se obtuvieron en esta tesis se manejaron y se manejan conforme a los reglamentos de la universidad UIPR.

3.3.3 Descripción de las técnicas

Todos los nueve estudiantes de una sección con la ayuda de la maestra se dividieron en dos grupos de cuatro y cinco estudiantes que fueron reunidos para la implementación de las actividades de aprendizaje. Las intervenciones entre el maestro colaborador del estudio y estudiantes, así como las discusiones entre los estudiantes de cada subgrupo, fueron grabadas en audio por el investigador principal. Se grabó en audio a los estudiantes cuando estuvieron haciendo uso de las fichas como manipulativos y cuando estaban desarrollando los procedimientos mediante algoritmos en las hojas de papeles donde estaban impresas las preguntas de las distintas actividades de aprendizaje. Para ello se utilizó una grabadora para cada uno de los dos grupos de cuatro estudiantes. Se estuvo reuniendo a los estudiantes participantes de cada sub – grupo en un periodo lectivo regular en que

los estudiantes tomaban el curso de Precálculo. Las actividades de aprendizaje fueron añadidas como parte de las estrategias académicas para lograr que los estudiantes pudieran tener una mejor comprensión de las funciones exponenciales.

Se recogió el trabajo escrito de cada grupo de cuatro estudiantes, luego de la implementación en la sala de clases de cada una de las cinco actividades de enseñanza del estudio.

La técnica de recolección de información que se propuso requirió la transcripción de cada actividad de enseñanza. La observación de la implementación de las actividades de enseñanza, las intervenciones entre el maestro colaborador del estudio y estudiantes, así como las discusiones entre los estudiantes de cada grupo estuvieron a cargo del investigador principal.

Otra técnica de recolección de información en este estudio consistió en una entrevista semiestructurada que administró el investigador principal. En la investigación, como en la mayoría de las entrevistas semiestructuradas, el entrevistador sigue un resumen de preguntas preparado de antemano. Dependiendo de las respuestas de un grupo de estudiantes, el entrevistador podría hacer preguntas de seguimiento. El entrevistador hace este tipo de preguntas para buscar una aclaración o para probar el pensamiento de un grupo de estudiantes más profundamente. Si estas preguntas no facilitaron respuestas suficientes, el entrevistador pudo tomar una ruta más didáctica y dar una pista para ver, con un poco de indicaciones, dónde estaba el estudiante en términos de su progreso en la

construcción de una construcción mental particular. Esta práctica se alineó con el paradigma, donde el objetivo de una entrevista en particular y de la investigación en general basada en APOE no era organizar a los estudiantes en categorías, sino determinar y explicar cómo los individuos construían su comprensión de los conceptos matemáticos. Este enfoque, que incluye preguntas de seguimiento y pautas, permitió al entrevistador observar el proceso de construcción a medida que se desarrollaba. Esto puede pensarse como una aplicación de la noción de zona de desarrollo proximo introducida por Vygotsky (1978).

Cada entrevista duró aproximadamente una hora. La entrevista se grabó en audio por el investigador principal. Se usan pseudónimos para los estudiantes. Las entrevistas se transcribieron y luego de transcurrido el tiempo reglamentario se borrarán. La entrevista semiestructurada que se utilizó incluyó aspectos sobre contenido matemático que permitieron deducir las estructuras mentales que cada estudiante utilizó para desarrollar el razonamiento de las funciones exponenciales. La entrevista fue cualitativa debido a que el informante tenía más posibilidades de expresión, lo cual conllevó a que se pudiera comprender más sus puntos de vista, actitudes, sentimientos, ideas, concepciones alternas, conocimientos, etc.; fue un medio de hacer investigación a profundidad (contrario al método de encuesta); las preguntas que se hicieron fueron abiertas y las respuestas pudieron abrir más posibilidades de indagación. La información obtenida de las entrevistas permitió triangular con información suministrada por las preguntas de análisis contenidas

en las hojas de trabajo de las actividades de aprendizaje, las observaciones reflexivas, análisis de literatura científica y revisión de fuentes de información.

Las entrevistas semiestructuradas y las observaciones reflexivas durante el experimento de diseño contribuyeron a proveer información para estudiar si la modificación de estrategias de enseñanza pudo contribuir a un mejor entendimiento de las funciones exponenciales, conocer cuáles son las construcciones mentales que hicieron los estudiantes y compararlas con las conjeturadas en la DG preliminar. Todo esto nos ayudó a conocer cómo los estudiantes de nivel superior de una escuela privada de Puerto Rico pudieron llegar a entender las funciones exponenciales.

Durante esta investigación se estudió si la variable dependiente, **el desarrollo del razonamiento de las funciones exponenciales**, depende de la variable independiente: **la descomposición genética y las actividades basadas en ella**.

3.3.4 Población y Muestra

El maestro colaborador de la escuela superior privada invitó a todos los estudiantes de una de sus secciones de Precálculo a participar en el estudio. Para ello les entregó los siguientes documentos: Documento de Consentimiento Informado para Madres, Padres o Encargados de los Estudiantes y Documento de Asentimiento Informado para Estudiantes. Todos los estudiantes completaron la

información solicitada en ambos documentos y los entregaron firmados al maestro colaborador.

3.3.5 Análisis

El método que se utilizó para trabajar con la información que se dispone fue el análisis de información cualitativa. Para analizar las actividades de enseñanza se adaptó la metodología RBC + C (Dreyfus et al., 2015) de la teoría AiC (Abstracción en Contexto) para que pudiera ser usada conjuntamente con la teoría APOE. Para ello, primero se transcribieron las discusiones que se llevaron a cabo durante las actividades de enseñanza, en las transcripciones se hicieron anotaciones de entonación según se creyó necesario. Luego se escucharon las grabaciones de audio y se añadieron notas a las transcripciones, según se estimó. Después se recortaron las transcripciones eliminando intercambios que no aportaron a la discusión, y se separaron en episodios. Los episodios se determinaron por el contenido, aspectos cognitivos, o factores externos que influenciaban el contenido o cognición. En este contexto, por “cognición” queremos decir comportamiento consistente con un cambio en etapa o posible nivel entre etapas de APOE. Luego, se examinó cada episodio, buscando evidencia de “reconocer” (primera vez que se menciona un prerequisite para solucionar un problema), “construir con” (Acciones que contribuyan a construir algún Proceso según conjeturado en la DG o Acciones que no han sido conjeturadas en la DG), “construir” (comportamiento consistente con alguna

característica de Proceso), y “consolidar” (evidencia de alguna Acción sobre lo que previamente era un Proceso o Proceso parcial). Finalmente, se organizaron las anotaciones de “reconocer”, “construir con”, “construir”, y “consolidar” en una tabla (ver Tabla 1), como sugerido en Dreyfus et al. (2015). Etapas más avanzadas del análisis, comparando construcciones de los estudiantes con lo conjeturado en la DG, decidiendo cómo mejorar la DG, y cómo mejorar las actividades para ayudar a que los estudiantes entiendan funciones exponenciales, parten de aquí.

Tabla hipotética de acciones epistémicas observables (Actividades de Aprendizaje) Subgrupos __					
Nombre	Declaración	Acciones Epistémicas Observables			
		<i>R</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>+C</i>

Tabla 1. Tabla hipotética de acciones epistémicas observables que se utilizó para llevar a cabo el análisis de trabajo en grupo para adaptar la metodología RBC+C de la teoría sociocultural de Abstracción en Contexto AiC a la teoría APOE.

Para analizar las entrevistas semiestructuradas se usó la metodología usual de APOE. Los pasos del análisis de la entrevista semiestructurada como método que se llevaron a cabo se describen como sigue:

1. **Organize la transcripción:** La transcripción está organizada según las respuestas a las preguntas de cada uno de los seis problemas presentados en la entrevista que facilitó cada estudiante participante del proyecto.

2. **Haga la tabla de contenido:** (ver Tabla 2) cada fila en la tabla representaba a cada estudiante participante del proyecto. En cada fila de la columna izquierda de la tabla se registraba un pseudónimo para proteger la identidad de cada uno de los ocho estudiantes participantes del proyecto. Las otras columnas restantes en la tabla representaban cada uno de los seis problemas distintos presentados a los estudiantes en la entrevista semiestructurada que fueron contruidos según lo conjeturado en la DG. Los otros espacios en la tabla incluían las construcciones mentales que evidenció cada estudiante participante del proyecto según fue contestando cada una de las seis preguntas de la entrevista semiestructurada.

3. **Enumere los códigos:** Se utilizaron como códigos las tres primeras letras del acrónimo de la Teoría APOE (“A”, Acción, “P”, Proceso-con su nombre según la DG, “O”, Objeto-con su nombre) para identificar cada una de las estructuras mentales que podían evidenciar los estudiantes participantes del proyecto alineadas con cada código definido para representar las distintas conjeturas de construcciones mentales que los estudiantes evidenciaron poder hacer según la DG para comprender el concepto función exponencial.

4. **En relación con la perspectiva teórica:** en este punto, la interpretación de los problemas se realiza a través del lente de la teoría APOE y el conjunto de las estructuras mentales definidas en la DG.

5. **Resumir el rendimiento utilizando códigos:** Se compara el comportamiento de los estudiantes entrevistados con lo conjeturado en la DG. Se señalan aquellas construcciones conjeturadas donde mostraron dificultad. Esto sugiere aspectos de la DG que hay que detallar para ayudar a que los estudiantes hagan estas construcciones. También se señalan construcciones inesperadas de los estudiantes. Esto puede sugerir revisar porciones de la DG para tomar en cuenta este comportamiento observado. Se puede discutir el comportamiento de los estudiantes que permanecieron en la etapa de Acción y compararlo con el de los estudiantes que alcanzaron etapas de Proceso y Objeto.

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
Est. 1						
Est. 2						
Est. 3						
Est. 4						
Est. 5						
Est. 6						
Est. 7						
Est. 8						

Tabla 2. Tabla para llevar a cabo el análisis de las entrevistas semiestructuradas individuales de cada estudiante participante en el estudio usando APOE.

3.4 Aspectos éticos Certificación CITI

Se hace referencia de aspectos ético. Certificación CITI (Véase anexo 1).

3.5 Plan de ejecución

Se hace referencia al cronograma de actividades anual que se utilizó para desarrollar el estudio (Véase anexo 2).

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

Introducción:

En este capítulo se presenta los resultados de las construcciones mentales que los estudiantes pudieron realizar en el estudio según definidas en la DG. Se muestra un resumen detallado analizando las construcciones mentales que realizaron los estudiantes participantes del estudio hasta encapsular algunas de ellas en un Objeto según la teoría APOE. En el análisis se discuten tres casos en detalles. Estos tres casos ejemplifican el comportamiento de todos los estudiantes participantes. Además, se muestra un resumen de las dificultades que tuvieron algunos estudiantes con algunas construcciones mentales en particular según lo conjeturado en la DG.

4.1 Construcción de Objeto de función exponencial en los enteros y Proceso en los racionales.

Presentaremos como primer ejemplo el caso de Anita.

Se le presentó a los estudiantes la siguiente situación en contexto:

Suponga que en el pueblo de Ponce se proyecta que el factor multiplicativo o de crecimiento de la altura de un globo aerostático, es tal que la altura en metros se duplica por minutos como muestran algunos de los datos del estudio. Ordena las fichas utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas que faltan.

Altura del globo aerostático en (metros)	1	2		8		32		128		512				
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3		5	6	7		9	10		13	14

Anita: ... Tenemos que velar que los de abajo (elementos de entrada) estén en orden ... Encontramos un patrón ...

Anita: [Luego] Son también exponentes, por lo tanto, tratan de esta misma idea de que el factor multiplicativo era 2 ... Verdad, de menor a mayor vamos multiplicando por 2 ... Y de mayor a menor ¿vamos?

Anita y Amara: Dividiendo entre 2.

Cuando Anita dice “Verdad, de menor a mayor vamos multiplicando por 2”, está mostrando que puede imaginar la multiplicación repetida sin tener que llevarla a cabo explícitamente, lo cual es consistente con un Proceso de multiplicación repetida y cuando dice “son también exponentes” muestra evidencia de relacionar exponenciación con multiplicación repetida. Esto le permite a Anita coordinar el Proceso de multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales donde se reconocen a los elementos de entrada asociados al tiempo como exponentes. En cambio, cuando Anita dice “y de mayor a menor ¿vamos? ... dividiendo entre 2” podemos determinar que muestra evidencia consistente con un Proceso de reversión de multiplicación repetida. Que pueda revertir sugiere que ha construido un Proceso de multiplicación repetida.

Anita resume el problema:

Maestra Colaboradora: ¿Cómo ustedes identificaron el patrón?

Anita: Porque la base es 2 y los elementos de entrada son los exponentes a los cuales se tiene que elevar la base 2 ... El tiempo (entrada) es el exponente que se le aplica a la base 2 ... Con ver cuando el exponente es 1, el de salida es 2, indicando que la base del exponente es 2 ... Los de abajo entrada, tiempo son los exponentes y los de arriba son los resultados, o sea las alturas en metros...

Esto muestra que, en el primer problema de la primera actividad, Anita reconoce las entradas como exponentes. Además, parece estar coordinando un Proceso de multiplicación repetida con un proceso prerequisite de exponenciación para construir el Proceso de función exponencial en los naturales, como se indica en la DG.

Para argumentar que un estudiante construyó un Proceso hace falta mostrar evidencia de diferentes problemas. La conceptualización de una noción matemática se clasifica considerando la tendencia general del estudiante al trabajar en diferentes problemas que envuelven la noción. A continuación, se muestran más ejemplos. El siguiente viene de la entrevista.

Investigador Principal: Una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad ... ¿Cuántos kilos va a haber 5 horas después? ...

Anita: Pues en esta situación tenemos una cantidad C que a cada hora se está triplicando esa cantidad C original y entonces te dice aquí que cuando comienza o inicia con 15 kilos ... Para poderlo calcular así después de 5 horas lo que yo haría es coger la cantidad inicial que sería 15 y entonces lo multiplicarías con el número 3 que se estaría triplicando cada hora y entonces elevar luego eso a la potencia 5.

Parece que Anita puede imaginar multiplicar repetidamente por tres (“lo multiplicarías con el número 3 que se estaría triplicando cada hora”) y eso lo expresa verbalmente en notación exponencial. Esto es consistente con Proceso de multiplicación repetida. También es consistente con una conceptualización de Proceso ya que puede generar una imagen dinámica (“se estaría triplicando cada hora”).

Se le presentó a los estudiantes la siguiente situación: Suponga que en el pueblo de San Juan se proyecta un aumento en la altura en (metros) de un globo aerostático por minutos de vuelo, como predicen algunos de los datos que se obtienen de un modelo matemático. Este modelo asume crecimiento exponencial de la altura, o sea, asume que hay un factor multiplicativo constante de 1.75. Ordena

las fichas en este tercer estudio y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas. Los datos que se dan en la tabla han sido redondeados a dos lugares decimales. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos?

Altura (metros)	3					
Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25

Anita: ... Ok, te explico cómo fue que yo la encontré ...

Básicamente, yo primero para poder verificar si era eso en la manera en que yo estaba pensando hice todos los cálculos individuales que me dio a cierto número ... Vamos a decir que el número era a ... Entonces lo que yo hice fue que cogí el factor multiplicativo y lo elevé a la entrada y cuando terminé de elevarlo a la entrada lo multipliqué por la salida original del caso original, en ese caso 3 ... Eso significa que tenemos este...

Amara: Podemos decir que es $f(5) = 3(1.75)^5$.

Anita: Exacto ... 1.75 lo elevas a la 5 por 3 y te va a dar esto 49.24

... $f(x) = 3 (\text{factor multiplicativo})^t$.

La intención del problema es ver si los estudiantes pueden imaginar “moverse hacia la derecha en saltos”. O sea, si pueden imaginar el cambio en valores de salida cuando los valores de entrada cambian de cinco en cinco. Anita comienza haciendo acciones “yo primero ... hice todos los cálculos individuales

que me dio a cierto número”. Luego, con ayuda de Amara, resume sus acciones usando exponentes “1.75 lo elevas a la 5 por 3 y te va a dar esto 49.24”.

Finalmente, parece encapsular su trabajo usando una fórmula “ $f(x) = 3 (\text{factor multiplicativo})^t$ ”.

Pero todavía no estaba claro si podía “dar saltos a la derecha”:

Investigador Principal: ... ¿Cómo yo puedo computar un factor multiplicativo de cada 5 minutos si ya ustedes conocen el factor multiplicativo por cada minuto de vuelo?

Anita: Que básicamente para poder encontrar el factor multiplicativo de cada 5 minutos se tiene que tomar el factor multiplicativo por minuto y lo elevas a 5 y básicamente el número de salida que obtengas por 5 cada vez para encontrar el siguiente elemento de salida haciendo saltos de 5 en 5 básicamente ... Vas cambiando ese exponente de cinco en cinco cada vez para poder encontrar el próximo elemento de salida cuando los elementos de entrada van saltando de 5 en 5...

Cuando Anita dice “se tiene que tomar el factor multiplicativo por minuto y lo elevas a 5” parece que puede imaginar multiplicar repetidamente por la base 1.75 y representar esto usando notación exponencial. Cuando dice “el número de salida que obtengas por 5 *cada vez* para encontrar el siguiente elemento de salida haciendo saltos de 5 en 5” muestra poder generar una imagen dinámica de la

multiplicación repetida. Esto es consistente con un Proceso de multiplicación repetida, que, al estar coordinado con exponenciación, es un Proceso de función exponencial en los naturales. Más adelante, Anita muestra que puede dar “saltos a la derecha” en otros contextos. Para computar que altura tendrá el globo aerostático con respecto al suelo luego de haber transcurrido 1 hora:

Investigador Principal: Y el factor multiplicativo de $\frac{1}{4}$ de hora lo elevamos a qué intervalo de tiempo?

Anita: Al exponente 4.

Más adelante, Anita comienza a dar muestras de que posiblemente ha construido un Objeto de función exponencial en los naturales.

Yanneth: ¿Si el factor de crecimiento continúa igual, que altura tendrá el globo aerostático con respecto al suelo luego de haber transcurrido 1 hora? Usa notación de exponentes para dar tu respuesta.

Anita: ... Espérate, sería coger el factor multiplicativo por minutos y lo elevas por el tiempo que es 60 minutos y lo multiplicas luego por 3 ... Yo voy calculando el resultado porque nos tiene que dar un decimal ... $f(t) = a(b)^t$, esto es $f(60) = 3(1.75)^{60}$...

$f(60) = 1.14658E15$, ese es el resultado final...

Cuando Anita dice “ $f(t) = a(b)^t$, esto es $f(60) = 3(1.75)^{60}$ ” muestra evidencia consistente con la construcción de un Objeto de función exponencial en

los naturales. Parece pensar en el Proceso de función exponencial en los naturales como una entidad en sí misma cuando utiliza una fórmula general $f(t) = a(b)^t$ y puede hacer acciones sobre esa totalidad. Parece ser que el Proceso de función exponencial en los naturales ha sido encapsulado en un Objeto de función exponencial en los naturales.

Los resultados sugieren que en la entrevista semiestructurada Anita también dio muestras de haber construido un Objeto de función exponencial en los naturales. Se le presentó a los estudiantes la siguiente situación: “Una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad” ... “¿Cuántos kilos va a haber cinco horas después?”

Investigador Principal: ¿Qué comprendes de esa situación?

Anita: Me viene a mi mente una fórmula que nosotros utilizamos y que descubrimos durante la implantación de las actividades de aprendizaje de la investigación que era $f(x) = ab^x$ ó $f(t) = ab^t$, donde a representa el valor inicial, la b representa el factor multiplicativo y la x o t que representa el tiempo ... En este caso el valor inicial sería 15, el factor multiplicativo sería 3, y el tiempo sería h que no se ha determinado...

Anita muestra evidencia consistente con que puede pensar en el Proceso de función exponencial en los naturales como una entidad en sí misma, una

totalidad, cuando dice (“Me viene a mi mente una fórmula ... $f(x) = ab^x$ ó $f(t) = ab^t$, donde a representa el valor inicial, la b representa el factor multiplicativo y la x o t que representa el tiempo”) y puede hacer o imaginar realizar Acciones sobre la totalidad cuando expresa (“En este caso el valor inicial sería 15, el factor multiplicativo sería 3, y el tiempo sería h que no se ha determinado”). Parece ser que el Proceso de función exponencial en los naturales que construyó Anita fue encapsulado en un Objeto de función exponencial en los naturales. La fórmula $f(t) = ab^t$ parece representar la encapsulación del Proceso de función exponencial en los naturales en un Objeto.

En el próximo ejemplo, Anita muestra evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial en los naturales a cero y los enteros negativos durante la implementación de las actividades de aprendizaje en la sala de clases.

La siguiente sucesión crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2. Complete la tabla.

Salidas								4	8	16
Entradas	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Amara: ¿Hay relación entre la entrada 0 con su salida correspondiente y lo que usted conoce acerca del exponente cero? ... Explique.

Anita: Sí, porque cuando la base está elevado a el exponente 0 eso es igual a 1.

Cuando Anita dice (“Sí, porque cuando la base está elevado a el exponente 0 eso es igual a 1”) muestra evidencia de extender función exponencial a cero como una Acción. Luego más adelante se le presentó a Anita otra situación donde logró inventarse argumentos que la obligaron a definir que el exponente 0 como $b^0 = 1$, justificando que $b^0 = 1$ utilizando propiedades de exponentes.

Se les presentó a los estudiantes la situación: Propiedades de exponentes dicen $b^{n+m} = b^n b^m$ o $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$. Use estas propiedades para inventarse argumentos que obligan a que se defina el exponente 0 como $b^0 = 1$ y exponentes negativos como $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

Amara: Pues la de multiplicación de exponentes ... Pues que los exponentes se suman, $b^{n+m} = b^n b^m$... Entonces lo que hice fue poner que b^{-n+n} pues como eso es la suma de dos términos donde uno es el inverso aditivo del otro, como uno es positivo y el otro es negativo las reglas de los signos nos dice que cuando sumamos dos sumandos uno siendo positivo y el otro negativo, pues eso se resta y entonces aquí esto daría a b^0 ... A la derecha de la igualdad redactaría $b^{-n} b^n$...

Anita: Ahí también los puedes escribir en fracción ... Pues como tienes $b^{-n} b^n$... La expresión exponencial de la izquierda, b^{-n} lo

conviertes a su recíproco que es $\frac{1}{b^n} \cdot b^n$ que eso sería b a la n sobre

b a la n , $\frac{b^n}{b^n}$ que eso sería a 1... Sí, entonces $b^0 = 1$...

En este argumento que Anita desarrolla con Amara, ellas justifican que $b^0 = 1$. Poder justificar y discutir en términos generales son características de un Proceso. Esto sugiere que la extensión al cero de función exponencial en los naturales se hace como un Proceso.

Continuando con la situación dada anterior de la tabla de valores que correspondía a una sucesión que crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2, Anita muestra evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial a los enteros negativos.

Anita: Los voy a expandir yo porque eso es de mente ... Les voy a explicar lo que hice ... Empezamos aquí en la tabla cuando transcurrió 4 minutos de vuelo la altura de la cesta del globo aerostático era de 16 metros ... Empezamos aquí con 16 ... El factor multiplicativo siempre va a ser 2 porque lo dice en los datos provistos en las instrucciones ... Pues vamos a dividir la altura de la cesta del globo aerostático de 16 metros entre 2 expandiendo los demás elementos de salida hacia la izquierda... $16 \div 2, 8 \dots 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \dots$

Anita comienza haciendo la Acción de dividir repetidamente por 2. Al hacer esto, revierte el Proceso de multiplicación repetida y de esta forma extiende a los enteros negativos. Aún falta más evidencia de que puede imaginar de forma dinámica o discutir en forma general la extensión a los enteros negativos. En lo que sigue, Anita discute la extensión a los enteros negativos en términos generales, lo cual es consistente con una conceptualización de Proceso.

Anita: ... Continuando hacia la izquierda eso significa que cuando el 2 está elevado a la -1 que significa en la situación en contexto un minuto antes de vuelo, 2^{-1} pues va a dar como elemento de salida $\frac{1}{2}$ metro de altura de la cesta del globo aerostático ... Y con el tiempo antes de t minutos de vuelo moviéndose hacia la izquierda, los negativos podemos evaluar esa expresión exponencial... Podemos asumir que con el tiempo negativo que es lo mismo que tener un número con exponente negativo y ponerlo como elemento de salida en la tabla o estimando la altura de la cesta del globo aerostático como el recíproco del número.

En este ejemplo, cuando Anita dice, “como están subiendo por 2 cada uno”, “va subiendo”, “Continuando hacia la izquierda”, “moviéndose hacia la izquierda”, está dando muestras de pensamiento dinámico, lo cual también es consistente con un Proceso de función exponencial en los enteros.

La siguiente situación, que sucedió durante la entrevista, la habíamos usado anteriormente como ejemplo de la construcción de un Proceso de función exponencial en los naturales. También nos da información acerca del Proceso de función exponencial en los enteros. En la entrevista se le presentó a la estudiante la siguiente situación: Una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad.

Investigador Principal: ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial? ...

Anita: Ok ... Pues como ahí dice que es 7 horas antes del momento inicial el 7 sería un -7 como exponente ... Por el contrario, si fuese 7 horas después el exponente sería un 7 positivo.

Investigador Principal: Para contestar la pregunta en oración completa ¿qué harías? ... ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?

Anita: Ok ... 7 horas antes del momento inicial habría $\frac{1}{1,458}$ kilos.

Investigador Principal: Para llegar a esa respuesta ¿qué hiciste?

Anita: Para poder llegar a esta respuesta primero analicé la oración y como me está preguntando ¿cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial? yo al instante pensé que el 7 es como exponente y tiene que ser un siete negativo, -7 ... Y utilizando la misma fórmula que te facilité previamente que era $f(h) = 15(3)^h$ sustituí

el exponente h por -7 y eso sería $f(-7) = 15(3)^{-7}$ y lo resuelvo
 ... dando $f(h) = \frac{5}{729}$ kilos ó $f(h) = 0.006859$ kilos.

Anita muestra evidencia consistente con hacer acciones sobre un Objeto de función exponencial en los enteros para contestar la pregunta (“¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?”). Parece ser que toma el Objeto de función exponencial en los naturales, ya construido, y lo desencapsula en el Proceso del que proviene, como se muestra en la pregunta cuando dice, “para poder llegar a esta respuesta primero analicé la oración y como me está preguntando ¿cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial? yo al instante pensé que el 7 es como exponente...” Luego generaliza para incluir exponentes enteros negativos cuando dice “y tiene que ser un siete negativo, -7 .” La estudiante muestra evidencia consistente con que puede realizar acciones en el Objeto de función exponencial en los enteros cuando expresa “utilizando la misma fórmula que te facilité previamente que era $f(h) = 15(3)^h$ sustituí el exponente h por -7 y eso sería $f(-7) = 15(3)^{-7}$...” Anteriormente, Anita había dado muestra de tener al menos una conceptualización de Proceso de función exponencial en los enteros. Eso da confianza que no está aplicando la fórmula como una Acción, como algo memorizado, sino que puede imaginar de dónde vino la fórmula. En este caso la fórmula $f(h) = 15(3)^h$ puede representar la encapsulación del Proceso de función exponencial en los enteros en un Objeto de función exponencial en los enteros.

Para extender función exponencial a los racionales, la DG propone comenzar con la construcción de un Objeto de raíces unitarias. En la entrevista se le preguntó a Anita: ¿Cómo usaría su calculadora para hallar un número que multiplicado por sí mismo 9 veces dé un resultado de 24?

Anita: “En este caso con la calculadora yo lo que haría es que *puedo tantear* haciendo distintas multiplicaciones para ver qué número que multiplicado por sí mismo 9 veces me dé como resultado de 24 ... O también *puedo computar la raíz novena* de 24 que me va a facilitar ese número que estoy buscando que multiplicado por sí mismo 9 veces me dé como resultado de 24”.

Hacer un cómputo tanteando con la calculadora para hallar una raíz unitaria es hacer Acciones. Imaginar que existe tal número sin tener que llevar a cabo el cómputo de forma explícita es consistente con una noción de Proceso de raíz unitaria. Anita muestra evidencia consistente con Proceso de raíz unitaria cuando imagina la existencia de un número “que multiplicado por sí mismo 9 veces me dé como resultado de 24”, En adición, mostró evidencia consistente con un Objeto de raíz unitaria cuando dijo “también *puedo computar la raíz novena* de 24.” Usa raíces para representar un Proceso sobre el cuál va a poder hacer a Acciones para extender función exponencial a todos los racionales y resolver otros problemas.

Ahora consideramos un ejemplo donde Anita muestra evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial a los racionales. Se

les presentó a los estudiantes la siguiente situación: En cada uno de los siguientes problemas, completa la sucesión de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número. c) 3, __, __, 9 y d) 3, __, __, __, 9.

Anita: ... En el enunciado c) yo pensé elevar el factor multiplicativo 3 a un tercio, $3^{\frac{1}{3}}$.

Investigador Principal: Ok, vamos a ver.

Anita: Primero verificar elevando el factor multiplicativo 3 a un tercio, $3^{\frac{1}{3}}$... Entonces si no nos da a 9 el último término de la sucesión, pues verificar otra vez... Sería $3 \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^1$ eso da aproximadamente a 4.33 ... Y funcionó ... Básicamente tú no estás elevando la base a un entero, tú estás elevando la base a una fracción.

Yanneth: Ajá.

Anita: Es como si tu estuvieses buscando las raíces cuadradas, las raíces cúbicas y las raíces cuartas.

Cuando Anita dice, “Ok, yo pienso que para buscar el factor multiplicativo de la sucesión del ejercicio d) ..., tú estás elevando la base a una fracción” ... “Es como si tu estuvieses buscando las raíces cuadradas, las raíces cúbicas y las raíces cuartas”, muestra evidencia de coordinar el Proceso de potencias fraccionarias

unitarias y el Proceso de función exponencial en los enteros para formar un nuevo proceso de función exponencial en los racionales. Este proceso permite pensar en

$\underbrace{b^{1/n} b^{1/n} \dots b^{1/n}}_{m \text{ veces}}$ cómo $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}$. Continuando con la conversación:

Yanneth: Uhu.

Anita: Y pues para poder calcular el factor multiplicativo en cada una de las sucesiones se obtiene el mismo, que es lo que nosotros llamamos el resultado o producto de la evaluación de la expresión exponencial de forma general como $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$ donde la base tiene que ser elevada a una fracción ... Sería utilizar algo como esto $a(m) = a \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

En la transcripción anterior, Anita da evidencia consistente con coordinar el Proceso de potencias fraccionarias unitarias con el Proceso de función exponencial en los enteros para extender este Proceso a exponentes fraccionarios. Que pueda discutir sobre función exponencial en los racionales en forma general y no limitada a cálculos específicos es consistente con una conceptualización de Proceso.

En otro problema se le presentó a la estudiante la siguiente situación:

“Explica verbalmente el significado de $4^{\frac{2}{3}}$ ” y “Explica verbalmente el significado de $40^{\frac{3}{7}}$ ”

Anita: Un número multiplicado por sí mismo tres veces nos da a 4, y al elevar este resultado por dos nos resulta con el valor final ...

Luego:

Anita: Un número que se multiplica por sí mismo siete veces da a 40 ... Y al elevar este resultado por tres nos da al resultado final.

En esta transcripción la estudiante vuelve a mostrar consciencia de pensar

en $\underbrace{b^{1/n} b^{1/n} \dots b^{1/n}}_{m \text{ veces}}$ como $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}$ y de imaginar lo que significa elevar un

número a una potencia racional. El que pueda interrelacionar diferentes representaciones de una noción matemática es consistente con una conceptualización de Proceso de la noción. En este caso Anita relaciona representaciones algebraica y verbal.

En la entrevista surgió una situación imprevista que puede ayudarnos a mejorar las actividades y tal vez la descomposición genética. Si bien, los estudiantes participantes del estudio podían asociar una fórmula de función exponencial de forma general como $f(t) = ab^t$ con situaciones dadas donde se indicaba de forma explícita que los datos dados correspondían a un modelo

exponencial, en cambio, algunos estudiantes no relacionaron multiplicación repetida con situaciones donde no se les indicaba de forma explícita que los datos correspondían a un modelo exponencial. Puede ser que esto sucediese porque durante la implementación de las actividades de aprendizaje los estudiantes no vieron problemas donde tuvieran que determinar si el crecimiento era exponencial o no. Consideremos el caso de Anita en la entrevista.

Investigador Principal: Indique si la siguiente tabla de valores corresponde a un modelo exponencial ... Explique.

x	$g(x)$
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13
6	16

Anita: Ok ... Pues yo escribí que no es una tabla de valores que corresponde a un modelo exponencial ya que si elevas cada uno de los valores de x o valores de entrada a la potencia 2 los últimos cuatro valores de salida que nos presenta la tabla no son cuadrados perfectos ... Esto se puede ver específicamente cuando el elemento de entrada es 3... Que, si tu elevas 3 a la potencia 2, 3^2 ahí el producto sería 9 y no 7 como se muestra en la tabla.

Podemos conjeturar que en este caso Anita no muestra relacionar un modelo exponencial con multiplicación repetida ya que no había encapsulado un

Proceso de multiplicación repetida en un Objeto. Eso no le permite aplicar acciones sobre el Proceso de multiplicación repetida (encapsulado) para tratar con contextos que son nuevos para ella. En las actividades del salón de clases Anita no vio un problema donde tuviese que determinar si el crecimiento era exponencial. Ella sí dio muestra consistente con haber construido un *Proceso* de multiplicación repetida pues lo usó para otras construcciones según se detalla en la DG.

En resumen, Anita construyó un Proceso de multiplicación repetida que además pudo revertir en las actividades de aprendizaje y en la entrevista. Además, coordinó el Proceso de multiplicación repetida con un Proceso prerequisite de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales. Luego, Anita dio muestras de haber construido un Objeto de función exponencial en los naturales. Su trabajo sugiere que encapsuló el Proceso de función exponencial en los naturales en un Objeto que representa con la fórmula general $f(t) = a(b)^t$ y que pudo hacer acciones sobre este Objeto.

Después, Anita mostró evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial en los naturales a cero y justifica la extensión con argumentos basados en propiedades de los exponentes. Por otro lado, también mostró evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial a los enteros negativos dando pasos y saltos a la izquierda en diferentes situaciones. Anita no aplicaba la fórmula $f(t) = a(b)^t$ como una Acción, como algo

memorizado, sino que podía imaginar de dónde venía la fórmula para aplicarla a diferentes situaciones. Al aplicarla hacía Acciones sobre el Proceso encapsulado que representaba con la fórmula. O sea, al aplicar la fórmula, Anita da muestra de haber construido un Objeto de función exponencial en los enteros.

En la entrevista semiestructurada, ella mostró evidencia consistente con haber encapsulado un Proceso de raíz unitaria en un Objeto de raíz unitaria. Finalmente, mostró evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial en los enteros a los racionales.

Cuatro de los ocho estudiantes construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros y un Proceso de función exponencial en los racionales, al igual que Anita.

4.2 Construcción de Objeto de función exponencial en los enteros y Acción en los racionales.

Mostramos como segundo ejemplo el caso de Genaro. Al igual que Anita, Genaro evidenció una conceptualización de Objeto de función exponencial en los enteros. Como las construcciones de Genaro son muy parecidas a las de Anita y en el caso de Anita se dio mucho detalle, vamos a considerar pocos ejemplos.

Durante la implementación de las actividades de aprendizaje en la sala de clases, se le presentó al estudiante la situación en contexto del globo en el Pueblo de Ponce que duplicaba su altura en minutos.

Altura del globo aerostático en (metros)	1	2		8		32		128		512				
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3		5	6	7		9	10		13	14

Genaro: Pregunta a) ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?

Luigie: La altura en metro sería dos elevado a cada uno de los elementos de entrada ... Esto sería: dos a la cero, 2^0 ... Dos a la uno, 2^1 ... Dos a la dos, 2^2 ... Dos a la tres, 2^3 ... Dos a la cuatro, 2^4 ... Dos a la cinco, 2^5 ... Y sigue así sucesivamente.

Investigador Principal: Y eso de una manera más sencilla, en términos de una regla general ... ¿Cuál tu formularías? ... Si sintetizas esa idea en términos de una regla.

Genaro: Pues entonces sería $f(x) = 2^x$; donde x sería igual a el tiempo ... El 2 es una constante y la x representaría el tiempo.

Luigie: $f(x)$ o y representa la altura y la x representaría el tiempo.

Genaro parece tomar como compartido el argumento de Luigie que está basado en multiplicación repetida. Esto lo deducimos ya que construye sobre ese argumento para hallar la fórmula. Expresa la multiplicación repetida en términos de exponenciación lo que sugiere que coordina los dos Procesos correspondientes en un Proceso de función exponencial en los enteros no negativos.

Durante la implementación de las actividades de aprendizaje en la sala de clases:

Genaro: La siguiente tabla corresponde a otro modelo para Mayagüez, con otro factor multiplicativo.

Altura (metros)	962	1,154.40	25,611.65	
Tiempo (minutos)	27	28	45	46

Así que esta es otra situación, pero con otro factor multiplicativo.

Luigie: Ok.

Genaro: Pregunta a) ¿puedes hallar el factor multiplicativo constante y usarlo para llenar los datos que faltan?... Se multiplican por 1.2 los de salida 962 y 25,611.65 ... $25,611.65 \times 1.2$

Luigie: Multiplicando por 1.2 ... Sí, eventualmente se supone que lleguemos a lo que nos piden.

Genaro: El de salida cuando el de entrada es 29 minutos lo multiplicamos por 1.2 y seguimos así sucesivamente multiplicando cada uno de los elementos de salida por 1.2 para encontrar el de salida cuando el de entrada es 45 minutos.

Luigie: ¿Hay una forma super fácil de hacer esto? ...

Multiplicando cada uno de los elementos de salida por 1.2 y los seguimos ascendiendo hasta encontrar el de salida cuando el de entrada es 46 minutos.

Genaro: No hay que hacer eso ... Porque aquí $25,611.65 \times 1.2$.

Genaro muestra evidencia consistente con un Proceso de reversión de multiplicación repetida cuando dice (“Se multiplican por 1.2 los de salida 962 y 25,611.65”) porque podemos inferir que calculó el cociente entre dos elementos de salida de forma consecutiva de la sucesión exponencial ($1,154.40 \div 962$) computar el factor multiplicativo de 1.2. Como Genaro muestra evidencia de que revierte multiplicación repetida, esto sugiere que construyó un Proceso de multiplicación repetida. También da muestra de que puede imaginar la multiplicación repetida cuando sugiere seguir multiplicando hasta llegar al elemento 46, y anticipa que basta con multiplicar el elemento 45 por 1.2. El que pueda imaginar una Acción repetida sin que tenga que llevarla a cabo explícitamente y que pueda anticipar el resultado de una Acción sin tener que llevarla a cabo explícitamente es consistente con una conceptualización de Proceso.

Presentamos un ejemplo donde Genaro evidencia haber construido un Objeto de función exponencial en los naturales. Se le presentó la siguiente situación en contexto: Asuma que el pueblo de Isabela un globo aerostático se encontraba en una altura de 384 metros 4 minutos luego de comenzar a tomar el tiempo y que un modelo matemático predice que la altura del globo aerostático, se duplica cada minuto. Se le preguntó, ¿puedes anticipar la altura en metros del globo aerostático en un intervalo de tiempo de 6 minutos? Explica tu respuesta.

Altura (Metros)					384
Tiempo (minutos luego de comenzar a tomar tiempo)	0	1	2	3	4

Genaro: Entonces la fórmula es $f(t) = ab^t \dots f(6) = 24 \cdot 2^6 \dots$

Que eso es igual a una altura de 1,536... Al tener el factor multiplicativo lo único que hay que hacer es elevarlo al tiempo de vuelo requerido que es 6 minutos y multiplicarlo por la altura inicial para poder anticipar la altura en metros del globo aerostático en el intervalo de tiempo especificado.

Genaro primero revierte multiplicación repetida para hallar la altura inicial

24. Luego representa el Proceso de función exponencial en los enteros, que anteriormente hemos argumentado que construyó, con una fórmula general $f(t) = ab^t$ sobre la cual hace la Acción de evaluar para valores específicos $a = 24$ y $b = 2$. Cuando Genaro dice (“Al tener el factor multiplicativo lo único que hay que hacer es elevarlo al tiempo de vuelo requerido que es 6 minutos y multiplicarlo por la altura inicial para poder anticipar la altura en metros del globo aerostático en el intervalo de tiempo especificado” conjeturamos que pensar en el Proceso de función exponencial en los naturales como una entidad en sí misma, una totalidad y puede hacer Acciones sobre la totalidad para para computar el elemento de salida especificado de 6 minutos. O sea, muestra evidencia consistente con una conceptualización de Objeto de función exponencial en los naturales.

Como Anita, Genaro extiende función exponencial a cero y lo justifica con un argumento basado en propiedades de exponentes.

En el próximo ejemplo, Genaro muestra evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial a un Proceso de función exponencial en los enteros.

Investigador Principal: Una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora ... En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad ...

Genaro: ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial? ... Pues ahí tenemos que ir hacia atrás ... Que no es como el ejercicio a) que era después del momento inicial ... Ahora es antes ... Pues, entonces lo que hacemos es que cogemos el 15 y lo dividimos entre el factor multiplicativo elevado a la potencia 7,

$$\frac{15}{3^7} \dots$$

Genaro muestra evidencia consistente con revertir un Proceso de multiplicación repetida cuando imagina dividir siete veces por tres (“Pues ahí tenemos que ir hacia atrás”). Como puede revertir multiplicación repetida, parece ser que construyó un Proceso de multiplicación repetida. Además, parece haber coordinado ese Proceso con un Proceso prerequisite de exponenciación (habla de 3^7), para construir un Proceso de función exponencial en los enteros.

En el próximo ejemplo, Genaro muestra evidencia consistente con encapsular el Proceso de función exponencial en los enteros en un Objeto de función exponencial en los enteros durante la implementación de entrevista semiestructurada.

Se le presentó a los estudiantes la siguiente situación: Una cantidad K crece exponencialmente, duplicándose cada día. Luego de 7 días hay 25 gramos de la cantidad. Si $f(t)$ es la cantidad de gramos que hay luego de t días, halle una fórmula para $f(t)$.

Genaro: Ok, pues es utilizando $f(t)$, pues se utiliza el valor inicial que vamos a utilizar la variable i y se multiplica por el factor multiplicativo que es x elevado a la potencia t , que en ese caso sería el tiempo... Pues yo escribí que la fórmula es $f(t) = i \cdot x^t$, donde i va a ser el valor inicial, x es el factor multiplicativo, t el tiempo y $f(t)$ es la cantidad de gramos que hay luego de t días.

Investigador Principal: Continúa... ¿Y luego Gustavo?... Si fueras a utilizar esa fórmula para aplicarla a la situación en contexto que te ha sido dada... ¿Ya esa sería la fórmula o tu aportarías algo más?

Genaro: Bueno pues depende de lo que estamos buscando... Porque si estamos buscando un valor que sea antes del tiempo

inicial pues cambiaría esa fórmula y en vez de multiplicar la $i \cdot x^t$ se estaría dividiendo $\frac{i}{x^t}$.

La contestación de Genaro sugiere que puede generalizar la misma fórmula $f(t) = ab^t$ que usaba en los naturales para todos los enteros t y de esta forma representar el Proceso de función exponencial en los enteros con la fórmula cuando dice “ $f(t) = i \cdot x^t$, donde i va a ser el valor inicial, x es el factor multiplicativo, t el tiempo y $f(t)$ es la cantidad de gramos que hay luego de t días.” Podemos observar cómo Genaro podía utilizar esa nueva fórmula de un modelo exponencial de forma general para aplicarla a la situación en contexto que había sido dada cuando dice “Porque si estamos buscando un valor que sea antes del tiempo inicial pues cambiaría esa fórmula y en vez de multiplicar la $i \cdot x^t$ se estaría dividiendo $\frac{i}{x^t}$ ”. Esto sugiere que encapsuló el Proceso de función exponencial en los enteros en un Objeto de función exponencial en los enteros que representa con la nueva fórmula.

Los resultados de las actividades de aprendizaje sugieren que Genaro no había extendido función exponencial a los racionales como un Proceso. Solo dio evidencia de hacer Acciones.

Se le presentó a los estudiantes la siguiente situación: En cada uno de los siguientes problemas, completa la sucesión de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número. a) 3, ____, 12”

Genaro: Encontrar un número que siga la sucesión ... Que se está multiplicando por cada término.

Luigie: No sé qué número tendía que ir en el medio de 3 y 12.

Genaro: No porque ahí tenemos que multiplicar por el mismo número ... Y ahí ustedes están sumando... No sé si tú me entiendes.

Genaro: Puede ser que estemos multiplicando... 3×3 si es 9... Pero 3×9 no es 12.

Genaro hizo la Acción de tantear multiplicando repetidas veces por tres. En su discusión con Luigie y otros compañeros se quedaron haciendo Acciones para tratar de resolver el problema. Luego de hacer Acciones eventualmente pudieron contestar el problema.

Como otro ejemplo, se le preguntó: ¿Qué entiende por $2^{0.65}$?

Genaro: Pues lo primero que me llega a mi mente fue que estamos elevando el 2 por un decimal, que, en vez de aumentar su producto por decirlo así, lo que va a pasar es que el valor del su producto disminuye ... Otra idea que se me ocurre es que el 2 puede ser elevado a una potencia racional.

Investigador Principal: Y por qué no partes de esa segunda idea que se te ocurrió.

Genaro: Bueno sí, porque el exponente es un decimal exacto y yo lo puedo convertir en una fracción ... bueno, pues si el exponente lo voy a convertir en una fracción ... Ok, déjame anotar, si tomo $2^{0.65}$... Que 0.65 si lo convierto en una fracción es igual a 13 sobre 20, $\frac{13}{20}$ que eso sería el exponente cambiado a una fracción.

Investigador Principal: ¿Eso lo puedes presentar de otra forma? ... Ya tienes como exponente $\frac{13}{20}$.

Genaro: Ahí sería que un número que multiplicado por sí mismo 20 veces de a 2.

Investigador Principal: ¿Y luego?

Genaro: ¿Y luego que hacemos con ese 13? ... Es que no sé qué hacer con ese 13.

Investigador Principal: ¿Qué harías con él? ... Vamos a ver... Si ya tienes un número multiplicado por sí mismo 20 veces da a 2.

Genaro: Se multiplica por 13.

Investigador Principal: ... Ahora pues retoma todo desde un principio y presentas lo último que estás analizando.

Genaro: Ok... Un número multiplicado por sí mismo 20 veces de a 2.

Investigador Principal: Y luego se...

Genaro: Y luego se multiplica por sí mismo 13 veces... Es un número que multiplicado por sí mismo 20 veces da a 2 y luego ese número multiplicado por sí mismo 13 veces nos tiene que dar al número.

El estudiante requiere de múltiples intervenciones del instructor para dar sentido a la expresión $2^{0.65}$. La transformación la percibe como externa pues tiene que seguir paso a paso las indicaciones del instructor. Esto es consistente con una conceptualización de Acción. No logró mostrar la interiorización de la extensión de función exponencial de los enteros a los racionales en un Proceso a lo largo de las actividades en el salón de clase ni en la entrevista.

En resumen, siete de los ocho estudiantes construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros, incluyendo a Genaro. Genaro fue el único estudiante de ocho que construyó una conceptualización de Acción de función exponencial en los racionales. Cuatro de ocho estudiantes construyeron un Proceso de función exponencial en los racionales y no hay evidencia de que los otros tres estudiantes hayan construido función exponencial en los racionales como Acción o Proceso.

4.3 Construcción de Objeto de función exponencial en los enteros y Pre-Acción en los racionales.

Presentaremos como tercer ejemplo el caso de Alejandro. Al igual que Anita y Genaro, Alejandro construyó un Objeto de función exponencial en los

enteros. Todas sus construcciones, comenzando con multiplicación repetida hasta Objeto de función exponencial en los enteros, son parecidas a las de Genaro y Anita. Así es que no vamos a presentar ejemplos de esto. A diferencia de Genaro, Alejandro no mostró poder llevar a cabo Acciones para extender función exponencial a los racionales, más allá de fracciones unitarias. Solo mostramos algunos ejemplos del tipo de respuesta que dio al tratar con exponentes racionales.

Se presenta un primer ejemplo donde Alejandro muestra evidencia consistente con Acción de raíz unitaria en la entrevista semiestructurada. Se le presentó al estudiante la siguiente situación: ¿Cómo usaría su calculadora para hallar un número que multiplicado por sí mismo 9 veces dé un resultado de 24?

Investigador Principal: Puedes verbalizar como tú lo harías utilizando una calculadora si la tienes accesible ... ¿Cómo lo harías, Alejandro?

Alejandro: Pues la utilizaría para tantear con decimales ya que no existe un entero que multiplicado por sí mismo 9 veces de como producto a 24

Investigador Principal: Me dijiste que lo harías tanteando ... ¿Cómo llevarías a cabo el tanteo utilizando una calculadora?

Alejandro: Usaría una ecuación $x^{\frac{1}{9}} = 24$ [sic]... Pues el 24 lo elevaría a la potencia $\frac{1}{9}$... Eso es lo que pondría como resultado ... Eso me dio a 1.423497814.

Investigador Principal: ¿Cómo puedes justificar que ese número multiplicado por sí mismo 9 veces de como resultado a 24? ...

Alejandro: Pues el número que obtuve que fue 1.423497814 lo elevo a la potencia 9 y cuando lo evalúo me da a 24.

Alejandro puede hacer Acciones para computar raíces unitarias, no es claro que pueda imaginarlas sino como un procedimiento rígido, y no mostró evidencia de que haya encapsulado raíz unitaria en un Objeto sobre el cual puede hacer Acciones. Esto puede verse en el siguiente ejemplo.

Se le preguntó al estudiante: ¿Qué entiende por $2^{0.65}$?

Alejandro: Pues no sé... Es un 2 elevado a la potencia 0.65.

La respuesta de Alejandro (“pues no sé”) sugiere que, para él, $2^{0.65}$ es un símbolo sin más sentido. No lo obtiene de hacer Acciones sobre la raíz unitaria $2^{\frac{1}{100}}$.

Se le presentó al estudiante la siguiente situación: Si la siguiente tabla de valores corresponde a un modelo exponencial, ¿cómo se pueden hallar los valores que faltan?

t	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
$f(t)$	14					28

Alejandro: ... Cuando el elemento de entrada es 2.2 el elemento de salida es 16.8... Cuando el elemento de entrada es 2.4 el elemento de salida es 19.6... Cuando el elemento de entrada es 2.6 el elemento de salida es 22.4... Cuando el elemento de entrada es 2.8 el elemento de salida es 25.2 ... Y cuando el elemento de entrada es 3 el elemento de salida es 28.

Investigador Principal: ¿Me podrías explicar cómo obtuviste cada uno de los elementos de salida que me acabas de facilitar?

Alejandro: Al elemento de salida 14 le sumé 2.8 y apliqué ese patrón de forma consecutiva con los elementos de salida hasta que el 3 que era la última entrada pues los valores de salida me dieran 28 ...

t	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
$f(t)$	14	16.8	19.6	22.4	25.2	28

Alejandro trata a la tabla como una función lineal y computa un número que *sumado* repetidas veces va del 14 al 28; computa $\frac{(28-14)}{5} = 2.8$. Esta Acción no tiene nada que ver con raíces unitarias ni exponentes racionales.

En resumen, de ocho estudiantes participantes del estudio siete estudiantes pudieron construir un Objeto de función exponencial en los enteros y el otro estudiante construyó un Proceso de función exponencial en los enteros. Además, de ocho estudiantes, cuatro construyeron un Objeto de raíz unitaria, dos

construyeron una Acción de raíz unitaria y dos no mostraron evidencia de hacer la construcción como Acción (Pre-Acción). Por otra parte, cuatro estudiantes pudieron construir un Proceso de función exponencial en los racionales, un estudiante construyó función de exponenciales en los racionales como Acción, y tres no mostraron evidencia de hacer la construcción como Acción (Pre-Acción).

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN

Introducción:

En este capítulo se resumen las construcciones mentales que los estudiantes participantes pudieron realizar en un segundo ciclo de estudio de la función exponencial (estudio de la tesis) y se comparan con los resultados de las construcciones mentales que los estudiantes pudieron realizar en el primer ciclo de estudio que se discute en Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022). Por último, se discutirán las limitaciones más importantes del estudio.

5.1 Discusión

Comenzamos este estudio proponiendo una descomposición genética (DG) y luego diseñamos actividades para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales propuestas en la DG. La DG se puso a prueba obteniendo datos de los estudiantes mientras trabajaban en las actividades en el salón de clases y en entrevistas semiestructuradas. En este estudio se analizaron las estructuras mentales que construyeron los estudiantes participantes (Acción, Proceso y Objeto) según la teoría APOE. No usamos explícitamente la noción de Esquema. En el estudio, mostramos que casi todos los estudiantes pudieron construir un Objeto de función exponencial en los enteros y algunos pudieron construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Esto es un logro porque los resultados son mejores que los de investigaciones previas (más adelante se discute un primer ciclo de investigación).

Este estudio nos permite ver cómo manipulativos similares (pero con nuevas adaptaciones) a los de Ferrari-Escolá et al. (2016), situaciones en contextos continuos como sugieren Ellis, et al. (2015, 2016), y diseños de diferentes actividades de aprendizaje, se pueden utilizar en la sala de clases para ayudar a los estudiantes a construir función exponencial con sentido. Esto es una aportación del estudio. En términos de contenido no tratado por Ferrari-Escolá et al., la verificación de que sus materiales pueden tener éxito, quizás con algunos refinamientos, en ayudar a los estudiantes a extender funciones exponenciales a los números racionales es otra contribución. En esta tesis mostramos que el uso de manipulativos con nuevas adaptaciones (representación de una función como máquina), el uso de la calculadora TI-*nspire* cx CAS, y nuevas situaciones dadas en contextos continuos como sugerido por Ellis, et al. (2015, 2016), pueden ser efectivos en ayudar a los estudiantes a lograr un mejor aprendizaje de las funciones exponenciales. Una limitación importante en este estudio es que los manipulativos y actividades no contribuyen a extender el Proceso de función exponencial de los racionales a todos los reales y que no tratan el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales.

Otra aportación del estudio es adaptar la metodología RBC+C de la teoría sociocultural de Abstracción en Contexto a la teoría APOE para llevar a cabo el análisis de los datos que se obtuvieron de las discusiones en grupo. La adaptación de la metodología RBC+C a la teoría APOE crea un nuevo instrumento para

recolectar y analizar datos, particularmente cuando se estudia el crecimiento de conocimiento a través de la interacción de individuos y no solamente un individuo aislado.

Este estudio replica en parte el estudio de Ferrari-Escolá et al. (2016) pero con diferencias significativas. Según Schmidt (2009), en los estudios de replicación se pueden incluir o añadir diferencias, lo cual contribuye a aumentar el poder confirmatorio de la replicación. De manera que podemos considerar que este es un estudio de replicación, ya que hemos incluido o añadido diferencias para lograr un equilibrio entre la verificación de hechos (confirmación) y la expansión del conocimiento (novedad) para obtener una nueva comprensión (Schmidt, 2009).

Los ciclos de investigación y el refinamiento de una descomposición genética (DG) mediante la construcción y el perfeccionamiento de actividades de aprendizaje son fundamentales en la metodología de investigación de la teoría APOE. A través de ciclos de investigación se va refinando un modelo inicial sobre las construcciones mentales que puede realizar un individuo de un concepto matemático (DG). Este estudio es una extensión del primer ciclo del estudio en Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022) con una nueva población de estudiantes de secundaria.

La discusión de las diversas construcciones mentales en el segundo ciclo de investigación y la comparación de estas con el primer ciclo de investigación es

otra de las contribuciones de este estudio. Consideremos en detalle los logros alcanzados en el segundo ciclo de investigación, en las construcciones mentales que los estudiantes participantes llevaron a cabo. Observamos que los ocho estudiantes participantes pudieron construir un Proceso de multiplicación repetida. Los ocho estudiantes pudieron llevar a cabo la Acción de ordenar y completar espacios en blanco en diferentes pares ordenados $(t, s(t))$ dados para distintas situaciones en contexto que asumían crecimiento o decrecimiento exponencial de la altura de un globo aerostático. Cuando los estudiantes repitieron acciones sobre lo antes expuesto y reflexionaron sobre esas acciones pudieron interiorizar un Proceso de multiplicación repetida que les permitió imaginar que (t) crecía aritméticamente mientras que $(s(t))$ crecía geométricamente, permitiéndoles relacionar a t con $s(t)$, y reconocer a t como el número de veces que la base b era multiplicada por sí misma. Los ocho estudiantes participantes pudieron coordinar un Proceso de multiplicación repetida con un prerequisite de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales, anticipando la forma general $s(t) = ab^t$. Esto verifica lo que se conjeturó en la descomposición genética.

A continuación, comparamos la participación de los estudiantes del primer ciclo de investigación en Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022) y los estudiantes participantes de este segundo ciclo. La mitad de los estudiantes del primer ciclo no reconoció que la entrada n en un par $(n, s(n))$ es un exponente. Estos

estudiantes inicialmente construyeron el crecimiento exponencial como una multiplicación repetida sin dar evidencia de estar consciente de que la entrada n registró el número de factores b en un producto S_n , o que n podía considerarse como un exponente. Los otros cuatro estudiantes reconocieron que los pares ordenados (n, S_n) podían considerarse como pares ordenados (n, b^n) donde b era la base dada. Estos estudiantes rápidamente empezaron a referirse a las entradas n como exponentes. Para resumir, cuatro estudiantes participantes del primer ciclo de estudio pudieron interiorizar la Acción de ordenar y completar espacios en blanco en pares ordenados que correspondían a crecimiento o decrecimiento exponencial, en un Proceso que reconocía que los pares tenían la forma (n, b^n) . Esos cuatro estudiantes participantes pudieron coordinar un Proceso de multiplicación repetida con un prerrequisito de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales. En cambio, los ocho estudiantes participantes del segundo ciclo construyeron un Proceso de multiplicación repetida, y además pudieron coordinar un Proceso de multiplicación repetida con un proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales.

Se pudo obtener información de la utilidad de las nuevas adaptaciones en los manipulativos. Por ejemplo, la representación de una función como máquina en el segundo ciclo parece haber contribuido a una mejor comprensión de notación de función ayudando a que siete de los ocho estudiantes del segundo

ciclo extendieran función exponencial de los naturales a los enteros y que construyeran un Objeto de función exponencial en los enteros. Ninguno de los estudiantes en el primer ciclo construyó un Objeto de función exponencial en los enteros. Solamente dos de ocho estudiantes en el primer ciclo construyeron un Proceso de función exponencial en los enteros.

Como sugiere Weber (2002), después de construir funciones exponenciales sobre los números enteros, la construcción puede extenderse a todos los números racionales. Ninguno de los estudiantes del primer ciclo construyó un Proceso de raíz unitaria. Los estudiantes del primer ciclo habían conocido exponentes fraccionarios unitarios en sus cursos, pero solo habían construido una concepción de Acción, ya que parecían centrarse en la notación, la manipulación mecánica de expresiones algebraicas, y el uso de hechos memorizados. Los estudiantes del primer ciclo necesitaban imaginar primero una potencia fraccionaria unitaria como resultado de algún Proceso (gráfico o numérico, con la ayuda de multiplicación repetida en una calculadora) antes de poder realizar Acciones en él. Es decir, los estudiantes necesitaban un Objeto de potencias fraccionarias antes de poder realizar acciones sobre él. Para esto, los estudiantes del primer ciclo necesitaban construir una comprensión verbal de los exponentes de fracción unitaria; necesitaban construir un significado para la operación: dado un número a y un entero positivo n , encontrar un número que cuando se multiplica por sí mismo n veces produce a .

Para construir un Proceso de raíz unitaria, la DG propone que dado un número positivo a y un entero positivo (pequeño) n , la Acción de usar tecnología de computación para tantear numéricamente y encontrar o aproximar un número que al multiplicarse por sí mismo n veces produce el número dado a , puede interiorizarse en un Proceso que permite al alumno imaginar y anticipar la existencia de tales números. Otras Acciones de usar tecnología para calcular una raíz unitaria, verificar que efectivamente tengan la propiedad esperada y usarlas para resolver situaciones de problemas contextuales pueden ayudar a los estudiantes a encapsular el Proceso de potencias fraccionarias unitarias o raíz unitaria en un Objeto. Observamos que, al considerar exponentes fraccionarios unitarios o raíces unitarias en las actividades de aprendizaje, algunos estudiantes del segundo ciclo estaban conscientes que para $a > 0$, y n positivo, $a^{1/n}$ es un número que multiplicado por sí mismo n veces da como resultado a . Estos estudiantes tomaron un Proceso de multiplicación repetida y lo coordinaron con el Proceso de potencias fraccionarias unitarias o raíz unitaria y el Proceso prerequisite de exponenciación para formar un nuevo proceso de función exponencial en los racionales. Este proceso les permitió pensar en $\underbrace{b^{1/n} b^{1/n} \dots b^{1/n}}_{n \text{ veces}}$ cómo $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}$.

En el párrafo anterior se conjeturó que si primero los estudiantes construían un Objeto de raíz unitaria luego podrían construir un Proceso de

función exponencial en los racionales. El propósito en el segundo ciclo de investigación era que por medio de las modificaciones que se hicieron en las actividades de aprendizaje los estudiantes hicieran acciones sobre un Objeto de raíces unitarias que les permitiera poder construir luego un Proceso de función exponencial en los racionales.

Debido a las nuevas modificaciones que se realizaron en las actividades de aprendizaje en el segundo ciclo hallamos que cuatro de ocho estudiantes construyeron un Proceso de función exponencial en los racionales. Los estudiantes habían estudiado previamente exponentes de fracción unitaria y notación radical en el curso de fundamentos de álgebra, pero inicialmente parecían estar limitados a una concepción de Acción de estas ideas y, por lo tanto, solo podían mostrar manipulaciones rígidas del simbolismo de una manera que parecía carecer de sentido. El trabajo con las actividades en el salón de clase permitió que vencieran esta dificultad y construyeran un Objeto de raíz unitaria, y que haciendo acciones sobre este Objeto construyeran un Proceso de función exponencial en los racionales.

El que la mitad de los estudiantes participantes del segundo ciclo no pudiera construir un Objeto de raíz unitaria y un Proceso de función exponencial en los racionales sugiere la necesidad de revisar las actividades para ayudar a que los estudiantes construyan una comprensión verbal de potencias fraccionarias unitarias antes de extender las funciones exponenciales a los números racionales.

Por supuesto sin haber construido exponentes racionales como Procesos y sin haberlos encapsulado como Objetos, no será posible realizar Acciones sobre exponentes racionales para extender la definición de exponente a todos los números reales. Para extender el Proceso de función exponencial a todos los reales, los estudiantes necesitarían haber construido previamente un Esquema de estructura de los números reales, permitiéndoles razonar sobre números racionales, números irracionales y sus expansiones decimales, lo cual es difícil en el nivel de la escuela secundaria (p. ej., Kidron, 2018). Esto nos sugirió que la extensión a exponentes reales se obtiene mejor construyendo sobre la comprensión intuitiva del tiempo (los exponentes) como una cantidad continua como en los modelos de crecimiento continuo de Ellis et al. (2015,2016). La comprensión intuitiva del tiempo como cantidad continua que tienen los estudiantes puede compensar su falta de conocimiento sobre la estructura de los números reales. Esto deja claro que los modelos continuos, como los de Ellis et al. (2015, 2016) y Kuper y Carlson (2020), necesitan ser utilizados, ya sea adaptados a los materiales o como componente de tarea para que los estudiantes puedan extender un Proceso de función exponencial en los racionales a un Proceso de función exponencial en los reales. Esto puede hacerse simultáneamente con el estudio gráfico de estas funciones. Esto deberá reconocerse en el nuevo diseño de actividades para realizar un tercer ciclo de investigación, ya que no se realizó en este segundo ciclo de investigación.

En resumen, en el segundo ciclo todos los ocho estudiantes participantes pudieron construir un Proceso de función exponencial en los naturales. Siete de los ocho estudiantes pudieron encapsular el Proceso de función exponencial en los enteros en un Objeto. El otro estudiante construyó un Proceso de función exponencial en los enteros. Después, de los ocho estudiantes cuatro construyeron un Objeto de raíz unitaria. Por último, los cuatro estudiantes que construyeron un Objeto de raíz unitaria pudieron extender el Proceso de función exponencial en los enteros a un Proceso de función exponencial en los racionales.

Para ayudar a los estudiantes a desarrollar las construcciones mentales definidas en la DG del segundo ciclo de investigación adaptamos los materiales de Ferrari-Escolá et al. (2016) y usamos situaciones continuas como sugieren Ellis, et al. (2015, 2016). Podemos conjeturar que el efecto de las modificaciones que se le hicieron a los manipulativos para que los mismos representaran una función como máquina y las actividades de aprendizaje permitieron que todos los estudiantes pudieran construir un Proceso de multiplicación repetida, así como otros Procesos y Objetos propuestos en la DG. Las modificaciones en los materiales didácticos en este estudio facilitaron el razonamiento en los estudiantes al permitir inquirir usando datos con significado para ellos, y relacionarlos a los parámetros de un modelo matemático exponencial de forma general $f(x) = ab^x$. La comprensión en términos concretos del significado de los parámetros a y b ayudó a los estudiantes a analizar y comprender mejor los comportamientos

relacionados a crecimiento o decrecimiento exponencial en diferentes situaciones dadas en contexto. Aún más, la nueva modificación del manipulativo (función como máquina) ayudó a los estudiantes participantes a construir un Objeto de función exponencial en los enteros y conjeturar una regla general “ $f(x) = ab^x$ ” para computar elementos de salida de la función exponencial. En fin, los nuevos materiales didácticos diseñados para el segundo ciclo pudieron ayudar a los estudiantes a mejorar la construcción de un Proceso de función exponencial en los naturales para luego poder extender dicho Proceso a un Proceso de función exponencial en los enteros y finalmente extender el Proceso de función exponencial en los enteros a un Proceso de función exponencial en los racionales.

Con lo que se aprendió durante la implementación de las actividades de aprendizaje en la sala de clases en el segundo ciclo, recomendamos hacer algunos cambios a la DG y a los materiales didácticos para realizar un tercer ciclo de investigación. La actividad donde se buscaba que los estudiantes justificaran la definición del exponente cero basándose en las reglas para suma y cocientes de exponenciales, no tuvo el efecto esperado. Esto hay que revisarlo. Por otra parte, para que los estudiantes puedan construir un Proceso de raíz unitaria y puedan tener una comprensión de los exponentes racionales en general, conjeturamos que los estudiantes necesitan hacer acciones sobre un Objeto de raíz unitaria para poder extender funciones exponenciales en los enteros a un Proceso de funciones exponenciales en los racionales. En el segundo ciclo, las actividades que se

diseñaron fueron parcialmente exitosas. Hay que mejorar estas actividades y su trato en el ciclo ACE para lograr una mayor reflexión. El rol del profesor es crucial para fomentar la reflexión y discusión productiva en grupo, así como la discusión en el pleno de la clase. Las nuevas actividades de aprendizaje que sean diseñadas para un tercer ciclo de investigación y la implementación del ciclo ACE, tienen que promover la construcción de problemas o situaciones en las que se enfatice la comprensión verbal de exponentes racionales. En la revisión de la DG para un tercer ciclo de investigación hay que describir la construcción de $f(x) = ab^x$ y no solo de $f(x) = b^x$, como se hace al presente. Las actividades que se diseñaron para “moverse a la derecha o izquierda en saltos” podían hacerse sin fomentar la reflexión que se buscaba. Hay que revisarlas.

Una limitación principal de este estudio fue que no se pudo culminar con la implementación de todas las actividades diseñadas para obtener datos sobre las construcciones de función exponencial y función logarítmica a causa de los contagios de algunos de los estudiantes participantes del estudio y de la maestra colaboradora con Covid-19. Por motivos a aumentos de casos de contagios de estudiantes y docentes con Covid-19 a causa de la pandemia en la escuela donde se llevó a cabo este estudio, el director escolar tomó como medida administrativa cautelar el cancelar las clases de forma presencial en las facilidades físicas y continuar con los procesos de clases de forma virtual en modalidad a distancia. Los estudiantes tuvieron que finalizar sus estudios en modalidad virtual. Esta

limitación trajo como consecuencia el que no se pudiera continuar con el estudio para finalizar la implementación de las actividades: “Extendiendo la definición de función exponencial a los racionales”, “Propiedades de los exponentes que se aplican en la función exponencial parte I”, “Construcción de la Función Logaritmo Parte I, “Construcción de la Función Logaritmo Parte II” y “Propiedades de Logaritmo”. Esta emergencia de salud impidió continuar con la recolección de datos del estudio.

La limitación principal de este estudio es que del material de Ferrari-Escolá et al. (2016) y Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022) no se puede esperar razonablemente que los estudiantes de este nivel entiendan la extensión a los reales. Esto se debe en parte a que el estudio de tesis no trata el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales. Los estudiantes necesitan construir gráficas de funciones exponenciales que modelan comportamientos de crecimiento y decaimiento para poder entender la extensión de un Proceso de función exponencial en los racionales a un Proceso de función exponencial en los reales.

El estudio tiene otras limitaciones, que incluyen: el ciclo de enseñanza ACE (Arnon et al., 2014) necesita ser implementado con más rigurosidad. Otros temas como ecuaciones exponenciales y logarítmicas y el uso de funciones exponenciales y logarítmicas para aplicaciones de modelado, deben ser consideradas. Para finalizar, las actividades de aprendizaje que se proyectaban

implementar en el segundo ciclo resultaron ser muy largas. Hubo que rediseñar gran parte de estas para que los estudiantes participantes pudieran contestar las situaciones dadas en cada una de ellas en un intervalo de tiempo de 90 minutos y cumplieran con los objetivos de este estudio.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIÓN

Este estudio es esencialmente un estudio de replicación conceptual (Sánchez, 2020) basado en Ferrari-Escolá et al. (2016) y Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022). Creemos que hemos introducido suficientes diferencias para lograr un equilibrio entre la verificación de hechos (confirmación) y la expansión del conocimiento (novedad) para obtener una nueva comprensión (Schmidt, 2009). Las diferencias entre este estudio y el estudio previo de Díaz-Berrios et al. (2022) incluyen: el rediseño de los manipulativos en Ferrari-Escolá et al. (2016) para que tomen la forma de función como máquina, situaciones en contextos continuos como sugieren Ellis, et al. (2015, 2016), diseños de diferentes actividades de aprendizaje que incluyen situaciones dadas en contexto, y la población de estudiantes estaba tomando un curso más avanzado (Precálculo).

En este estudio, se modeló el crecimiento y decrecimiento exponencial adaptadas al entorno del estudiantado puertorriqueño (globo aerostático del pueblo de Jayuya), con una población de estudiantes de secundaria. Este estudio contribuye a la literatura existente al examinar como los estudiantes pueden extender la idea de multiplicación repetida a una función exponencial en los números racionales. En este estudio se constata que al utilizar el material de Ferrari-Escolá et al. (2016) y Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022) con una estrategia pedagógica adecuada, la enseñanza utilizando el ciclo ACE (actividades en grupos, discusión en clase, y ejercicios), los estudiantes de nivel secundario

pueden construir un Proceso de función exponencial en los números racionales a partir de multiplicación repetida. En este estudio no se consideró el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales y por lo tanto no se consideró la extensión de función exponencial de los racionales a todos los reales.

Las observaciones del estudio permiten refinar las actividades y la descomposición genética para que pueda ser puesta a prueba con más ciclos de experimentación. Consideramos que se tiene que revisar el conjunto de actividades en general, para que sean más efectivas en ayudar a que los estudiantes hagan las construcciones propuestas en la DG. Por ejemplo, proponemos que para que los estudiantes construyan un Proceso de raíz unitaria se debe dar énfasis a la representación verbal. Anticipamos que este énfasis va a contribuir a que los estudiantes construyan un Proceso de raíz unitaria que luego pueden encapsular en un Objeto sobre el cual hacer acciones para extender función exponencial a todos los racionales. Otro ejemplo de una revisión importante es que la DG debe revisarse para incluir el estudio gráfico de las funciones exponenciales. Este estudio, apoyado en contextos continuos, puede ayudar a extender función exponencial a todos los números reales.

Para finalizar, los resultados de este estudio facilitaron datos que nos permitieron contestar la primera pregunta de investigación: La descomposición genética que se propone en esta tesis, ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden función exponencial? Podemos afirmar que la DG describió

efectivamente lo que la mayor parte de los estudiantes pudieron construir para entender función exponencial. La mayor parte de los estudiantes construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros y algunos un Proceso de función exponencial en los racionales. Esto es un logro importante del estudio ya que en el primer ciclo de investigación la mayor parte de los estudiantes no pudo realizar estas construcciones.

Finalmente, los datos obtenidos en el estudio nos permitieron contestar la segunda pregunta de investigación: De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes de secundaria dan muestra de poder hacer y las que les causan dificultad? Las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética que los estudiantes evidenciaron poder hacer fueron: Proceso de multiplicación repetida, coordinación de un Proceso de multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales, extender el Proceso de función exponencial en los naturales a un Proceso de función exponencial en los enteros, y construir un Proceso de raíz unitaria. La mitad de los estudiantes pudo extender este último Proceso a un Proceso de función exponencial en los racionales.

En el aspecto teórico, la adaptación de la metodología RBC+C de la teoría de Abstracción en Contexto para usarse como una herramienta en APOE para el análisis de trabajo grupal de estudiantes, es otra aportación de este estudio.

Referencias

- Alagic, M., & Palenz, D. (2006). Teachers explore linear and exponential growth: Spreadsheets as cognitive tools. *Journal of Technology and Teacher Education*, 14(3), 633–649.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer New York Heidelberg Dordrecht London.
- Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, Ed., Mathews, D., Thomas, K., & (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. II, num. 3, pp. 1-32.
- Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms*. Tesis de maestría no publicada, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada.
- Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olson, J., & Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 69–82.

- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2002). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9 - 13.
- Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 124-159). New York: Springer.
- Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and the rate of change: New approaches to multiplication and exponential function. En G. Harel and J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press, pp. 293-332.
- Confrey, & E. Smith. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135 – 164.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86.
- Davis, J. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365–389. DOI:10.1007/s10857-009-9115-2.
- De Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the

- irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311–333.
- DePierro, E., & Garafalo, F. (2008). Helping students make sense of logarithms and logarithmic relations. *Journal of Chemical Education*, 85 (9), 1226–1228.
- Díaz-Berríos, T., & Martínez-Planell, R., (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 1-20. Obtenido de <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953>
- Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 271–300.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory. En A. Biker – Ahsbahs et al. (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*, Springer Science + Business Media Dordrecht. DOI: 10. 1007 / 978 – 94 – 017 – 9181 – 6_8. (185 – 217).
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.
- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 135–155. DOI: 10.1016/j.jmathb.2015.06.004
- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(3), 151-181.
- Farfán Márquez, R. M. (2016). *Socioepistemología y ciencia : el caso del estado estacionario y su matematización*. (GEDISA, Ed.) España. DOI: 9788497847087, 8497847083
- Ferrari, M. & Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. RELIME. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, Vol. 11, N°. 3, 2008, pags. 309-354.
- Ferrari-Escola, M., Martinez-Sierra, G., & Mendez-Guevara, M. E. M. (2016). Multiply by adding: Development of a logarithmic-exponential

- covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 92–108.
- Ferrari, M., & Farfán, R. (2017). Multiplicar sumando: Una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20, 137-166. DOI: 10.12802/relime.17.2021.
- Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst Model: A Teaching Experiment in Covariational Reasoning and Exponential Growth*. Tesis doctoral inédita, Arizona State University, Tempe, AZ.
- Gruver, J. (2018). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 1–22.
- Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B. B. (2007). Abstracting processes, from individuals' constructing' of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematical Education Research Journal*, 19, 41–68. <https://doi.org/10.1007/BF03217455>
- Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. México D. F.: Mcgraw-Hill / Interamericana Editores, s.a. de c.v.
- Hoon, T. S., Singh, P., & Ayop, S. K. (2010). Working with logarithms. *MEDC Journal*, 6.
- Kenney, R. (2005). Students understanding of logarithmic functions. En G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. M. Wilkins, & S. L. Behm (Eds.). *Proceedings of*

the Twenty-Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA).

Kidron, I. (2018). Students' conceptions of irrational numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 94–118.

Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 57 (100740) 1 – 18. http://www.math.wsu.edu/mathed/Seminar/2019-2020/KuperCarlson_2020_Log.pdf

Liang, C. B., & Wood, E. (2005). Working with logarithms: Students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator*, 8(2), 53-70. Association of Mathematics Educators.

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003>

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge* (P. Walsh, Trans.). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1967). Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. En A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: Proceedings of the second*

international congress on mathematical education (pp. 79–87).

Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1980). *Adaptation and intelligence* (S. Eames, Trans.). Chicago:

University of Chicago Press. (Original work published 1974).

Piaget, J. (1975/1985). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Barcelona:

Crítica.

Presmeg, N., & Nenduardu, R. (2005). An investigation of a pre-service teacher's

use of representations in solving algebraic problems involving exponential

relationships. En H. L. Chick & J. K. Vincent (Eds.), *Proceedings of the*

29th conference of the international group for the psychology of

mathematics education (Vol. 4, pp. 105–112). Melbourne, Australia:

PME.

Rodríguez, M. C. A. (2021). Reconstrucción cognitiva de los conceptos centrales

de la función exponencial: un estudio de enfoque mixto. *Formación*

Universitaria, 14(6), 149-164. Obtenido de

<http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000600149>

Salkind, N. J. (Ed.). (2008). *Encyclopedia of educational psychology*. United

States of America: Library of Congress Cataloging-in-Publicación Data.

DOI: ISBN978-1-4129-1688-2

Sánchez Aguilar, M. (2020). Replication studies in mathematics education: What

kind of questions would be productive to explore? *International Journal of*

Science and Mathematics Education. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10069-7>

- Schmidt, S. (2009). Shall we really do it again? The powerful concept of replication is neglected in the social sciences. *Review of General Psychology*, 13(2), 90–100.
- Sfard, A. (1991). "On the dual nature of mathematical conceptions", *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91–104. DOI: 10.1207/s15327833mtl0602_2
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2016). *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo*. México, D.F.: Brooks & Cole, una compañía de Cengage Learning.

- Strom, A. (2006). The role of covariational reasoning in learning and understanding exponential functions. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 624–630). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Strom, A. (2008). *A case study of a secondary mathematics teacher's understanding of exponential function: An emerging theoretical framework*. Unpublished PhD dissertation, School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University. Obtenido de <http://pat-thompson.net/PDFversions/Theses/2008Strom.pdf>
- Sullivan, M. (2006). Álgebra y trigonometría. En M. Sullivan, *Álgebra y trigonometría* (pp. 412 - 490). México: Pearson Educación.
- Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.
- Von Hofe, R., & Hans-Joachim Blum, W., (2016). “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37. DOI: 10.1007/s13138-016-0107-3.

- Vygotsky, L. S. (1978). *Capítulo VI Interacción Entre Aprendizaje y Desarrollo*. España: Editorial Crítica, S. A., calle de la Cruz, 58, Barcelona - 34.
- Watters, D., & Watters, J. (2006). Student understanding of pH. *Biochemistry and Molecular Biology Education*, 34 (4), 278–284.
- Weber, C. (2016). Making logarithms accessible — operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37 (Suppl. 1), 69–98.
- Weber, C. (2017). Multiple models for teaching logarithms: with a focus on graphing functions. March 2017 Conference: *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME10* At: Dublin. Volume: pp. 537–544.
- Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (24th, Athens, GA, October 26-29. Disponible en internet Adelaide, Australia: University of Adelaide.
- Williams, H. (2011). *A conceptual framework for student understanding of logarithms*. Tesis de maestría inédita. Brigham Young University.
- Wood, E. (2005). Understanding logarithms. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 24(4), 167–178.

Apéndices

Apéndice A

Aspectos éticos Certificación CITI

COLLABORATIVE INSTITUTIONAL TRAINING INITIATIVE (CITI PROGRAM)

COMPLETION REPORT - PART 1 OF 2 COURSEWORK REQUIREMENTS*

* NOTE: Scores on this Requirements Report reflect quiz completions at the time all requirements for the course were met. See list below for details. See separate Transcript Report for more recent quiz scores, including those on optional (supplemental) course elements.

- Name: Tomas Diaz (ID: 8683650)
- Institution Affiliation: Inter American University of Puerto Rico (ID: 1370)
- Institution Email: tdiaz0354@intersg.edu
- Institution Unit: San German Campus
- Phone: 787-380-2495

- Curriculum Group: (SBR)
- Course Learner Group: Same as Curriculum Group
- Stage: Stage 1 - Basic Course

- Record ID: 34413489
- Completion Date: 02-Dec-2019
- Expiration Date: 01-Dec-2022
- Minimum Passing: 75
- Reported Score*: 94

REQUIRED AND ELECTIVE MODULES ONLY	DATE COMPLETED	SCORE
Belmont Report and Its Principles (ID: 1127)	01-Dec-2019	3/3 (100%)
Students in Research (ID: 1321)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Defining Research with Human Subjects - SBE (ID: 491)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
The Federal Regulations - SBE (ID: 502)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Assessing Risk - SBE (ID: 503)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Informed Consent - SBE (ID: 504)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Privacy and Confidentiality - SBE (ID: 505)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Research with Children - SBE (ID: 507)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Inter American University of Puerto Rico (ID: 12851)	02-Dec-2019	No Quiz
Conflicts of Interest in Human Subjects Research (ID: 17464)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Records-Based Research (ID: 5)	02-Dec-2019	0/3 (0%)
Research in Public Elementary and Secondary Schools - SBE (ID: 508)	02-Dec-2019	5/5 (100%)

For this Report to be valid, the learner identified above must have had a valid affiliation with the CITI Program subscribing institution identified above or have been a paid Independent Learner.

Verify at: www.citiprogram.org/verify/7k054db7fa-7c55-4288-a43a-726c28d78751-34413489

Collaborative Institutional Training Initiative (CITI Program)
Email: support@citiprogram.org
Phone: 888-529-5929
Web: <https://www.citiprogram.org>

COLLABORATIVE INSTITUTIONAL TRAINING INITIATIVE (CITI PROGRAM)

COMPLETION REPORT - PART 2 OF 2

COURSEWORK TRANSCRIPT**

** NOTE: Scores on this Transcript Report reflect the most current quiz completions, including quizzes on optional (supplemental) elements of the course. See list below for details. See separate Requirements Report for the reported scores at the time all requirements for the course were met.

- Name: Tomas Diaz (ID: 8893650)
- Institution Affiliation: Inter American University of Puerto Rico (ID: 1370)
- Institution Email: tdiaz0354@intersg.edu
- Institution Unit: San German Campus
- Phone: 787-380-2495

- Curriculum Group: (SBR)
- Course Learner Group: Same as Curriculum Group
- Stage: Stage 1 - Basic Course

- Record ID: 34413489
- Report Date: 02-Dec-2019
- Current Score**: 94

REQUIRED, ELECTIVE, AND SUPPLEMENTAL MODULES	MOST RECENT	SCORE
Students in Research (ID: 1321)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Defining Research with Human Subjects - SBE (ID: 491)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
The Federal Regulations - SBE (ID: 502)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Belmont Report and Its Principles (ID: 1127)	01-Dec-2019	3/3 (100%)
Records-Based Research (ID: 5)	02-Dec-2019	0/3 (0%)
Assessing Risk - SBE (ID: 503)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Informed Consent - SBE (ID: 504)	01-Dec-2019	5/5 (100%)
Privacy and Confidentiality - SBE (ID: 505)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Research with Children - SBE (ID: 507)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Research in Public Elementary and Secondary Schools - SBE (ID: 508)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Conflicts of Interest in Human Subjects Research (ID: 17464)	02-Dec-2019	5/5 (100%)
Inter American University of Puerto Rico (ID: 12851)	02-Dec-2019	No Quiz

For this Report to be valid, the learner identified above must have had a valid affiliation with the CITI Program subscribing institution identified above or have been a paid Independent Learner.

Verify at: www.citiprogram.org/verify/?k054db7fa-7c55-4299-a43a-726c28d78751-34413489

Collaborative Institutional Training Initiative (CITI Program)

Email: support@citiprogram.org

Phone: 888-529-5929

Web: <https://www.citiprogram.org>

COLLABORATIVE INSTITUTIONAL TRAINING INITIATIVE (CITI PROGRAM)
COMPLETION REPORT - PART 2 OF 2
COURSEWORK TRANSCRIPT**

** NOTE: Scores on this Transcript Report reflect the most current quiz completions, including quizzes on optional (supplemental) elements of the course. See list below for details. See separate Requirements Report for the reported scores at the time all requirements for the course were met.

- **Name:** Tomas Diaz (ID: 8693650)
- **Institution Affiliation:** Inter American University of Puerto Rico (ID: 1370)
- **Institution Email:** tdiaz0354@intersg.edu
- **Institution Unit:** San German Campus
- **Phone:** 787-380-2495

- **Curriculum Group:** COVID-19: Back to Campus (Fall 2020)
- **Course Learner Group:** Same as Curriculum Group
- **Stage:** Stage 1 - Basic

- **Record ID:** 38544773
- **Report Date:** 20-Sep-2020
- **Current Score**:** 100

REQUIRED, ELECTIVE, AND SUPPLEMENTAL MODULES	MOST RECENT	SCORE
COVID-19: An Introduction (ID: 20080)	20-Sep-2020	1/1 (100%)
COVID-19: Prevention Strategies (ID: 20081)	20-Sep-2020	1/1 (100%)
COVID-19: Moving Forward (ID: 20082)	20-Sep-2020	3/3 (100%)

For this Report to be valid, the learner identified above must have had a valid affiliation with the CITI Program subscribing institution identified above or have been a paid Independent Learner.

Verify at: www.citiprogram.org/verify/?kbfb83c766-b970-44cf-bd0e-7fc4bee3866d-38544773

Collaborative Institutional Training Initiative (CITI Program)

Email: support@citiprogram.org

Phone: 888-529-5929

Web: <https://www.citiprogram.org>

Phone: 888-529-5929

Web: <https://www.citiprogram.org>

superior privadas																			
Creación de la base de datos																			
Análisis de datos																			
Reporte de resultados																			
Observaciones																			

Apéndice C

Entrevista semiestructurada

1) Indique si la siguiente tabla de valores corresponde a un modelo exponencial.

Explique.

x	$g(x)$
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13
6	16

- 2) Una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento dado hay 15 kilos de la cantidad.
 - a. ¿Cuántos kilos va a haber 5 horas después?
 - b. ¿Cuántos kilos va a haber h horas luego del momento inicial?
 - c. ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?
- 3) Una cantidad K crece exponencialmente, duplicándose cada día. Luego de 7 días hay 25 gramos de la cantidad.
 - a. ¿Cuál será la cantidad luego de 21 días?
 - b. ¿Cuál era la cantidad inicial?
 - c. Si $f(t)$ es la cantidad de gramos que hay luego de t días, halle una fórmula para $f(t)$.
- 4)
 - a. ¿Cómo usaría su calculadora para hallar un número que multiplicado por sí mismo 9 veces dé un resultado de 24?
 - b. ¿Qué entiende por $2^{0.65}$?
- 5) Si la tabla a continuación es de una función exponencial, ¿cómo se pueden hallar las salidas?

Entrada	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
Salida	14					28

- 6) Suponga que hay una planta cuyo tamaño crece exponencialmente, que inicialmente mide 5 centímetros y que duplica su tamaño cada semana. ¿En cuánto tiempo medirá 100 centímetros?

Apéndice D



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Hoja de validación de expertos

Construcción y credibilidad del instrumento de preguntas para la entrevista que se le realizará a los participantes del estudio.

Luego de haber leído las preguntas realizadas por el investigador para la entrevista, evalúe las mismas realizando una marca de cotejo en la alternativa según su observación.

Criterio	Escala de medición				Comentarios
	Excelente	Bueno	Regular	Deficiente	
Claridad en el lenguaje de las preguntas	XXXXXX				
Pertinencia de las preguntas	XXXXXX				
Adecuación de las preguntas	XXXXXX				
Cantidad de preguntas		XXXXXX			
Sintaxis	XXXXXX				

Comentarios generales

La calidad de las preguntas es excelente. No obstante, es posible que una entrevista con 9 preguntas y varias subpreguntas sea demasiado extensa para estudiantes que tienen dificultades con el material. Es importante tener un plan para manejar entrevistas que resulten demasiado largas donde el desempeño del estudiante y del propio entrevistador pueda afectarse sencillamente por el factor cansancio. La información que puede obtenerse del patrón de pensamiento que siguen los estudiantes que exhiben dificultades con el material, puede ser muy valiosa, pues provee mecanismos para identificar aspectos donde sea necesario diseñar intervenciones posteriores dirigidas a re-enseñar. Tener un plan bien definido de manejo de la entrevista con estudiantes con dificultades puede resultar útil al investigador. Por otro lado, entiendo que las preguntas planteadas de ninguna manera atentan contra la privacidad de los entrevistados o levantan algún aspecto ético.

Angel Luis Cruz Delgado

Catedrático, Departamento de Ciencias Matemáticas UPR Mayagüez



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Hoja de validación de expertos

Construcción y credibilidad del instrumento de preguntas para la entrevista que se le realizará a los participantes del estudio.

Luego de haber leído las preguntas realizadas por el investigador para la entrevista, evalúe las mismas realizando una marca de cotejo en la alternativa según su observación.

Criterio	Escala de medición				Comentarios
	Excelente	Bueno	Regular	Deficiente	
Claridad en el lenguaje de las pregunta	X				
Pertinencia de las preguntas	X				
Adecuacidad de las preguntas	X				
Cantidad de preguntas	X				
Sintaxis	X				

Comentarios generales:

La idea de hacer preguntas específicas, es decir con valores, y luego hacer la pregunta en el caso general me parece excelente. Es una manera de saber si el estudiante tiene claro el concepto de logaritmo.

Nombre: Olgamaly Rivera Marrero



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Hoja de validación de expertos

Construcción y credibilidad del instrumento de preguntas para la entrevista estructurada y semiestructurada que se le realizará a los participantes del estudio.

Luego de haber leído las preguntas realizadas por el investigador para la entrevista, evalúe las mismas realizando una marca de cotejo en la alternativa según su observación.

Criterio	Escala de medición				Comentarios
	Excelente	Bueno	Regular	Deficiente	
Claridad en el lenguaje de las preguntas		x			La pregunta 2b, contiene la palabra inventarse , considero que debe rebuscarse el vocabulario (como redacte en sus propias palabras)
Pertinencia de las preguntas	x				Son muy pertinentes al tema
Adecuación de las preguntas	x				Son muy adecuadas al tema
Cantidad de preguntas	x				La cantidad de preguntas es considerable
Sintaxis	x				En general la sintaxis es correcta.

Comentarios generales:

Las preguntas de su instrumento están bien construidas y redactadas. Son pertinentes para los participantes con conocimiento matemático.

Saraí Nieves Bernard

Saraí Nieves Bernard, EdD

Departamento de Ciencias y Tecnología

Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Apéndice E

Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

13 de octubre de 2021

A: Sr. Carlos Molina Rivera

Director y administrador de la Escuela San Germán Interamericana

De: Profesor Tomás Díaz Berríos

Doctorando del Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán

Estimado Sr. Molina

Me dirijo a usted para pedirle autorización para realizar un estudio en la Escuela San Germán Interamericana, la cual usted dirige. Me gustaría realizar un estudio acerca de la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con un grupo del curso de Precálculo de su escuela, con la aprobación y participación de la Profesora Sonia J. Alers Castillo. Ya me comuniqué con esta maestra vía correo electrónico y ella me ha expresado estar de acuerdo siempre y cuando se cuente con su permiso. Este estudio nos va a permitir mejorar el

aprendizaje de los estudiantes. La Profesora seleccionará un grupo al cual le dicta el curso de Precálculo para que participe del tratamiento del estudio. El tratamiento consiste en actividades para ser hechas en grupos de 3 o 4 estudiantes, discusión en clase, y actividades para el hogar. La Profesora Sonia J. Alers Castillo estará presente durante todo el tiempo de clase que se dedique a la investigación. El investigador principal estará presente en el salón de clases observando cada clase durante el tratamiento del estudio. Luego de terminado el tratamiento se le administrarán entrevistas semiestructuradas a un grupo de ocho estudiantes. Las entrevistas a los ocho estudiantes serán grabadas mediante audio. También se grabará en audio cuando los estudiantes estén utilizando los manipulativos durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje. Los datos que se recopilen son confidenciales y se utilizarán solo para el propósito indicado. Se va a dar una carta de consentimiento para participación en el estudio de investigación a los padres, madres o encargados de los estudiantes para que estos den su aprobación y también se dará una carta de asentimiento informado a los estudiantes.

De tener alguna duda puede comunicarse con este servidor al correo electrónico: tomasm301@gmail.com.

Gracias por su atención.



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

(X Autorizo ____ No autorizo) al Profesor Tomás Díaz Berríos, Doctorando del Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán a realizar el estudio acerca de la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con un grupo del curso de Precálculo de mi escuela la cual dirijo.

Carlos Molina Rivera

Director y administrador de la Escuela San Germán Interamericana

Firma

Apéndice F

Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Carta de colaboración para maestros

14 de septiembre de 2021

A: Profesora Sonia J. Alers Castillo

Profesora de Matemáticas de la Escuela San Germán Interamericana

De: Profesor Tomás Díaz Berríos

Doctorando del Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán

Estimada Sra. Alers

Me dirijo a usted para solicitarle su participación voluntaria como maestra participante en un estudio de investigación. Me gustaría realizar un estudio acerca de la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con un grupo del curso de Precálculo que usted dicta en su escuela, con la aprobación del director y administrador de la Escuela San Germán Interamericana el Sr. Carlos Molina Rivera. Ya he hablado con este director y él me ha dicho estar de acuerdo

siempre y cuando se cuente con su participación de forma voluntaria. Este estudio nos va a permitir mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Usted como profesora de matemáticas seleccionará un grupo al cual le dicta el curso de Precálculo para que participe del tratamiento del estudio. El tratamiento consiste en actividades de enseñanza para ser hechas en grupos de 3 o 4 estudiantes, discusión en clase, y actividades de práctica para el hogar. Usted estará presente durante todo el tiempo de clase que se dedique a la investigación. El maestro investigador la adiestrará utilizando un manual o guía para que pueda dar el tratamiento en el estudio por medio de la implementación de 11 actividades de aprendizaje y 11 hojas de ejercicios de práctica para que los estudiantes los realicen en el hogar. El maestro investigador estará presente como observador cuando usted implante cada una de las actividades del proyecto, para monitorear que la implementación de las mismas se lleve a cabo cumpliendo con los objetivos del diseño de estas. También, el maestro investigador se reunirá con usted después de cada actividad para discutir acerca de la ejecución de los estudiantes en la actividad, y hacer cualquier ajuste a las actividades que se estime necesario. Se le va a pedir que escoja dos grupos de cuatro estudiantes a quienes se van a grabar en audio mientras estén participando en las actividades grupales. Estas serán grabadas por el investigador principal. Luego de terminado el tratamiento se les administrarán entrevistas semiestructuradas a esos ocho estudiantes, de forma individual. Las entrevistas a los estudiantes también serán grabadas en audio por el investigador principal. Los datos que se recopilen son confidenciales y se utilizará solo para el propósito indicado.

La colaboración que solicitamos de usted en las actividades de este estudio:

1. Es voluntaria, con fines educativos y libre de riesgos a su persona. Deberá salvaguardar la confidencialidad de la información contenida en los documentos (cartas de consentimiento y asentimiento informado).

2. Entregar carta dirigida a padre, madre o encargado donde se explicará el propósito de la investigación, los consentimientos informados a los estudiantes para que los lleven a sus respectivos padres, madres o encargados y recogerlos una vez estén firmados, a fin de confirmar la autorización para la participación de los estudiantes en el estudio.
3. Entregar los asentimientos informados a los estudiantes y recoger los mismos debidamente completados y firmados por estos.

Si tiene preguntas adicionales respecto a la investigación puede comunicarse con este servidor al correo electrónico: tomasmat301@gmail.com.

De usted estar de acuerdo con la colaboración que le solicito en esta investigación, por favor complete la información requerida y firme con tinta azul el documento.

Gracias por su atención.



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Acepto participar de forma voluntaria en estudio que realizará el Profesor Tomás Díaz Berríos, Doctorando del Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán acerca de la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con un grupo del curso de Precálculo que dicto en la Escuela San Germán Interamericana en la cual trabajo.

Sonia J. Alers Castillo

Profesora de Matemáticas de la Escuela San Germán Interamericana

Firma

Fecha

Tomás Díaz Berríos

Doctorando del Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán

Firma

14 de septiembre de 2021

Fecha

Apéndice G



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

DOCUMENTO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA MADRES, PADRES O ENCARGADOS DE LOS ESTUDIANTES

Título de la Investigación: La enseñanza y aprendizaje de las funciones
exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria

Nombre del Investigador: Tomás Díaz Berríos

I. Propósito de la Investigación

El propósito de esta investigación es: (1) Estudiar las construcciones mentales que hacen los estudiantes para entender función exponencial y función logarítmica, aplicando la teoría APOE para ello. (2) Estudiar si la enseñanza utilizando el ciclo ACE (actividades en grupos, discusión en clase,

y ejercicios), contribuye al desarrollo de la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria.

II. Participantes

Se seleccionará un grupo de estudiantes de cada una de dos escuelas privadas de nivel superior diferentes en Puerto Rico para que participe en el estudio. En cada una de las escuelas se seleccionarán 8 estudiantes voluntarios de duodécimo grado que estén tomando el curso de Precálculo. Para seleccionar a los estudiantes participantes se usará el orden de llegada de los documentos consentimiento y asentimiento informado firmados y unas categorías (que se describen más adelante) basadas en el aprovechamiento académico en cursos previos de matemáticas.

III. Procedimientos

- 1) Entregar carta dirigida a padre, madre o encargado al maestro colaborador del estudio una vez estén firmados, a fin de confirmar la autorización para la participación de los estudiantes en el estudio donde se explicará el propósito de la investigación.
- 2) Entregar los asentimientos informados del estudiante al maestro colaborador del estudio una vez estén firmados, a fin de confirmar la autorización para la participación de los estudiantes en el estudio.

- 3) Se van a escoger ocho estudiantes para participar en el estudio usando el orden de entrega de los documentos firmados y tres categorías relacionadas al aprovechamiento académicos de los estudiantes en el curso de matemática previo: los primeros dos estudiantes con promedio entre 90% y 100%, los primeros cuatro estudiantes con promedio entre 80% y 89%, los primeros dos estudiantes con promedio entre 70% y 79%.
- 4) Se llevará a cabo una entrevista semiestructurada creada por el investigador para que los estudiantes participantes del estudio contesten aspectos de contenido matemático.
- 5) Se estarán reuniendo a los estudiantes participantes de cada sub – grupo en el periodo lectivo regular en que los estudiantes toman el curso de Precálculo.
- 6) La participación del estudiante consistirá en contestar 11 actividades de aprendizaje, 11 actividades ejercicios de prácticas para realizar en el hogar, y una entrevista de una hora al finalizar el tópico. Todos los estudiantes en el salón de clases, incluyendo los estudiantes participantes de este estudio, contestarán las mismas actividades en el período lectivo del curso y tendrán los mismos ejercicios de práctica asignados para hacer en el hogar. Todos los estudiantes trabajarán las actividades en pequeños grupos de tres o cuatro estudiantes cada uno. La única

diferencia es que las discusiones en los dos grupos en que estarán ubicados los estudiantes participantes de este estudio se van a grabar en audio, y se va a sacar copia del trabajo escrito de estos grupos, para que luego puedan ser analizados por el investigador.

- 7) Las entrevistas semiestructuradas se llevarán a cabo en un salón privado del plantel escolar.
- 8) Las grabaciones en audio de las actividades y entrevistas semiestructuradas serán realizadas por el investigador principal.
- 9) Si su hijo desiste de participar en el estudio continuará tomando la clase de Pre-cálculo de forma normal. Su nota en el curso no se verá afectada. Al estudiante no se le grabará su discusión en los grupos de estudio donde el participará. Al estudiante no se le administrará la entrevista semiestructurada al finalizar el tratamiento del estudio.
- 10) El investigador principal tendrá acceso al rendimiento académico del estudiante en el curso de Pre-cálculo.
- 11) El investigador principal estará presente en la sala de clases grabando en audio las aportaciones de los estudiantes participantes durante el tratamiento del estudio.

IV. Riesgos

La probabilidad es mínima de que algún estudiante participante se vea adversamente afectado por el proyecto. Entendemos que la investigación no

involucra ningún riesgo diferente de lo de la asistencia regular a la escuela. La razón para esto es que todos los estudiantes en su salón de clase estarán usando los mismos materiales para estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas. La única diferencia es que la discusión en grupo de estudiantes participantes se va a grabar en audio, y de los otros estudiantes no. De darse una situación de “bullying”, esto puede representar un alto riesgo para el estudiante; por eso se le da al estudiante diferentes opciones. Situaciones de acoso de estudiantes, hostigamiento social o ansiedad, por ejemplo, que a nuestro entender puedan ser consecuencia del proyecto, se pueden tratar recordando al estudiante que está libre de dejar el proyecto cuando quiera, y dándole conocimiento de la situación al maestro colaborador, para que la trate con los protocolos y prácticas usuales de la escuela. No obstante, pudiera darse el caso que los estudiantes participantes voluntarios de este estudio sean objeto de hostigamiento social. De ocurrir esto, si su padre, madre o encargado así lo desean, pueden ser atendidos por un estudiante practicante o internista de psicología de la UIPR-SG supervisado por un psicólogo profesional, quienes le brindarán sus servicios de forma gratuita.

El proceso de apoyo a esta investigación se realizará mediante los procedimientos y normas de la Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos de la UIPR-SG (CCSP). La CCSP ofrece sus servicios en un escenario académico supervisado. Los horarios son de lunes a viernes de 8:00

a.m. a 5:00 p.m. La colaboración de los profesionales en Psicología de esta clínica para esta investigación se describe como sigue:

- Las intervenciones con los sujetos en la investigación, de ser necesario, se realizarán por estudiantes practicantes e internos supervisados de la UIPR–SG, bajo la dirección del Dr. Alfred Soler Santos, con número de licencia profesional 7080.
- Los servicios que se ofrecerán serán: la primera intervención psicosocial, sesiones de desahogo y referidos a proveedores de salud mental.
- Los servicios de la CCSP serán destinados gratuitamente a estudiantes que participen en la investigación y cuyos consentimientos y asentimientos informados estén firmados. Esto excluye, familiares y otros estudiantes del plantel escolar.
- Los servicios de la CCSP deberán ser coordinados por el investigador principal y el padre, madre o encargado del estudiante, comunicándose al (787) 264 – 1912 extensión 7713/ 7718 o escribiendo al correo electrónico institucional: clínica_psic@sangerman.inter.edu.
- Los servicios se realizarán en un periodo de 45 días desde la fecha de comienzo de la investigación.

- Los servicios e intervenciones se ofrecerán exclusivamente en las facilidades de la CCSP de la UIPR – SG edificio Harris Hall o mediante plataforma virtual preestablecida.

V. Beneficios

Los estudiantes participantes tendrán el beneficio de experimentar una forma innovadora para la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas. Se proyecta que los estudiantes participantes van a estar en posición de obtener un entendimiento más profundo de las funciones exponencial y logarítmica del que usualmente obtendrían en un curso tradicional. La información de esta investigación podría conducir a mejorar en el futuro las técnicas y estrategias de enseñanza en los cursos de Álgebra 2 y Precálculo I y II en una escuela pública o privada de nivel superior de Puerto Rico. Los estudiantes participantes tendrán el beneficio de ayudar a mejorar la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica.

El estudiante participante no recibirá ningún beneficio económico por participar en este estudio.

VI. Cláusula de confidencialidad

Esta investigación es con fines educativos. Durante el estudio, sólo se busca información sobre cómo los estudiantes participantes construyen su

conocimiento. Se mantendrá la confidencialidad del estudiante y de la escuela donde estudia. No se utilizará el nombre del estudiante en el estudio.

Los resultados de esta investigación pueden ser publicados en revistas científicas de matemática educativa o ser presentados en un congreso de investigaciones sobre temas de educación matemática, pero la identidad del estudiante no será divulgada. Toda la información suministrada por el estudiante en este estudio será mantenida de acuerdo con el documento normativo A – 1220 – 065 (Normas sobre la protección de los derechos de los sujetos humanos que participan en proyectos o en actividades de investigación).

Los datos crudos solo serán accedidos por el investigador principal y su comité de disertación en la Universidad Interamericana de Puerto Rico. Las notas y resultados que obtengan los estudiantes participantes en las Actividades de Enseñanza y Ejercicios de Práctica que completen como parte de este proyecto, las usará el maestro colaborador para evaluar a los estudiantes de la forma en que usualmente lo hace con todos sus estudiantes en sus cursos. El investigador principal tendrá acceso al trabajo o copia del trabajo de estos estudiantes con el fin de obtener información para el estudio. Los datos impresos se conservarán por tres años en un archivo con llave en el estudio del hogar del investigador principal. Al finalizar el tiempo requerido,

se dispondrán de los documentos, luego de ser triturados para reciclaje. Los datos digitales de grabaciones en audio se almacenarán en un disco duro externo que se encuentra en el estudio del hogar del investigador principal. Al finalizar el tiempo requerido se eliminarán los archivos con los datos.

La copia del consentimiento informado que firma el padre, madre o encargado será conservada en un archivo con llave en el estudio del hogar del investigador principal.

La información puede ser revisada por el Comité de Derechos Humanos (IRB siglas en inglés) de la Universidad Interamericana de Puerto Rico. El IRB de la IAUPR – IRB es un cuerpo rector encargado por velar y proteger que no se violen los derechos de los sujetos humanos que participan en proyectos de investigación.

VII. Compensación

En esta investigación, no habrá ningún tipo de compensación económica.

VIII. Voluntariedad

La participación de su hijo o hija en este estudio es libre y voluntaria. Su determinación no resultará en ninguna penalidad o pérdida de beneficios para los cuales tenga derecho.

IX. Aceptación del padre, madre o encargado del participante

La participación de su hijo o hija en este estudio debe ser voluntaria. El tiempo que dedique a las actividades del proyecto en su salón de clases debe ser el mismo que va a dedicar todos los estudiantes de su sección para hacer las mismas actividades.

Acepto que mi hijo o hija participe voluntariamente en esta investigación. Entiendo que sus responsabilidades como estudiante participante son: contestar 11 actividades de aprendizaje, contestar 11 actividades de ejercicios de prácticas para realizar en el hogar y contestar una entrevista semiestructurada al finalizar el tratamiento del estudio.

X. Aceptación del participante

Certifico que he leído este documento en el que se me explica los procedimientos y condiciones para participar en esta investigación y acepto participar voluntariamente en la misma.

_____ Fecha _____
Firma del participante

_____ Fecha _____
Firma del Investigador

De tener alguna duda o pregunta con relación a esta investigación o sus derechos como participante puede comunicarse con:

IAUPR Institutional Review Board
PO BOX 363255 SAN JUAN PR 00936-3255
787-766-1912 ext. 2432

De surgir alguna otra duda o pregunta puede comunicase con el investigador en:

Profesor Tomás Díaz Berríos Teléfono celular: 787 – 380 – 2495
tomasmat301@gmail.com

Investigador Principal

Dr. Rafael Martínez Planell
rmplanell@gmail.com

Director de Tesis

**[NOTA: EL PARTICIPANTE TIENE DERECHO A RECIBIR COPIA DE
ESTE DOCUMENTO FIRMADO POR AMBAS PARTES]**

El padre, madre o encargado podrá solicitar una copia de este consentimiento al investigador principal por medio de llamada telefónica o por medio de correo electrónico.

Apéndice H



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

DOCUMENTO DE CONSENTIMIENTO PARA MAESTRO COLABORADOR

Título de la Investigación: La enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria

Nombre del Investigador: Tomás Díaz Berríos

I. Propósito de la Investigación

El propósito de esta investigación es: (1) Estudiar las construcciones mentales que hacen los estudiantes para entender función exponencial y función logarítmica, aplicando la teoría APOE para ello. (2) Estudiar si la enseñanza utilizando el ciclo ACE (actividades en grupos, discusión en clase, y ejercicios), contribuye al desarrollo de la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria.

II. Participantes

Se seleccionará un maestro colaborador de cada una de dos escuelas privadas diferentes en Puerto Rico para que participe en el estudio. En cada una de las escuelas se seleccionarán 8 estudiantes voluntarios de duodécimo grado que estén tomando el curso de Precálculo. Para seleccionar a los estudiantes participantes se usará el orden de llegada de los documentos consentimiento y asentimiento informado firmados y unas categorías (que se describen más adelante) basadas en el aprovechamiento académico en cursos previos de matemáticas.

III. Procedimientos

- 1) Se llevará a cabo una entrevista estructurada a maestros colaboradores que dictan el curso de Precálculo para buscar información sobre como dictan el contenido de los tópicos funciones exponenciales y logarítmica en su clase, incluyendo: métodos pedagógicos, uso e integración de tecnologías, identificación de tópicos que el maestro colaborador cubre, el tiempo aproximado que dedica, y la importancia que para el maestro tienen estos tópicos. Toda la información que se obtenga en esta entrevista solo será utilizada para fines de esta investigación. Se mantendrá la confidencialidad del maestro y de la información que se recoja en la entrevista.

- 2) El maestro colaborador debe entregar carta dirigida a padre, madre o encargado donde se explicará el propósito de la investigación, los consentimientos informados a los estudiantes para que los lleven a sus respectivos padres, madres o encargados y recogerlos una vez estén firmados, a fin de confirmar la autorización para la participación de los estudiantes en el estudio.
- 3) Entregar los asentimientos informados a los estudiantes y recoger los mismos debidamente completados y firmados por estos.
- 4) El maestro y el investigador principal deben salvaguardar la confidencialidad de la información contenida en los documentos (cartas dirigidas a los padres sobre el propósito del estudio, cartas de consentimiento y asentimiento informado).
- 5) Los ocho estudiantes que participarán en el estudio se van a determinar usando el orden de entrega de los documentos firmados y tres categorías relacionadas al aprovechamiento académicos de los estudiantes en el curso de matemática previo: los primeros dos estudiantes con promedio entre 90% y 100%, los primeros cuatro estudiantes con promedio entre 80% y 89%, los primeros dos estudiantes con promedio entre 70% y 79%. El maestro colaborador será el único que tenga acceso a los expedientes académicos de los estudiantes.

- 6) Los estudiantes de la sección de curso de Precálculo serán divididos en grupos de tres o cuatro estudiantes. Los estudiantes participantes formarán dos grupos de cuatro estudiantes, donde cada grupo tiene exactamente un estudiante con promedio entre 90% a 100%, y un estudiante con promedio entre 70% y 79%. El investigador interaccionará con los dos grupos de estudiantes participantes y el maestro colaborador con los otros grupos de estudiantes no participantes. Todos los grupos trabajarán de forma colaborativa con actividades diseñadas por el investigador.
- 7) El maestro colaborador junto con el investigador principal decidirá el momento propicio para llevar a cabo discusiones de las actividades en el pleno de la clase.
- 8) El maestro colaborador asignará a los estudiantes ejercicios de práctica diseñados por el investigador para hacer en el hogar.
- 9) La participación del estudiante consistirá en contestar 11 actividades de aprendizaje, 11 actividades ejercicios de prácticas para realizar en el hogar, y una entrevista de una hora al finalizar el tópico. Todos los estudiantes en el salón de clases, incluyendo los estudiantes participantes de este estudio, contestarán las mismas actividades de enseñanza en el período lectivo del curso y tendrán los mismos ejercicios de práctica asignados para hacer en el hogar.

El investigador principal evaluará el trabajo de los estudiantes participantes del estudio y el maestro colaborador evaluará el trabajo del resto de los estudiantes. El investigador principal solamente usará datos obtenidos de los estudiantes participantes. Todos los estudiantes trabajarán las actividades en pequeños grupos de tres o cuatro estudiantes cada uno. La única diferencia es que las discusiones en los dos grupos en que estarán ubicados los estudiantes participantes de este estudio se van a grabar en audio, y se va a sacar copia del trabajo escrito de estos grupos, para que luego puedan ser analizados por el investigador. El investigador principal estará presente durante todas las clases en que se lleven a cabo las actividades de aprendizaje como parte del tratamiento del estudio de investigación.

- 10) El maestro colaborador se reunirá con el investigador principal después de cada clase (donde se discutan los tópicos del estudio) para discutir el resultado de la actividad y rediseñar de ser necesario las actividades a discutirse en la próxima clase.
- 11) El maestro colaborador coordinará entrevistas semiestructuradas acerca de aspectos de contenido matemático que el investigador realizará a los ocho estudiantes participantes. Estas entrevistas se harán de forma individual a cada estudiante con una duración de

aproximadamente una hora cada una. Las entrevistas semiestructuradas se llevarán a cabo en un salón privado del plantel escolar, se graban en audio y serán realizadas por el investigador principal.

IV. Riesgos

El estudio puede conllevar posibles riesgos para el estudiante participante y el maestro colaborador.

La probabilidad es mínima de que algún estudiante participante se vea adversamente afectado por el proyecto. Entendemos que la investigación no involucra ningún riesgo diferente de lo de la asistencia regular a la escuela. La razón para esto es que todos los estudiantes en su salón de clase estarán usando los mismos materiales para estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas. La única diferencia es que la discusión en grupo de estudiantes participantes se va a grabar en audio, y de los otros estudiantes no. De darse una situación de “bullying”, esto puede representar un alto riesgo para el estudiante; por eso se le da al estudiante diferentes opciones. Situaciones de acoso de estudiantes, hostigamiento social o ansiedad, por ejemplo, que a nuestro entender puedan ser consecuencia del proyecto, se pueden tratar recordando al estudiante que está libre de dejar el proyecto cuando quiera, y dándole conocimiento de la situación al maestro colaborador, para que la trate

con los protocolos y prácticas usuales de la escuela. No obstante, pudiera darse el caso que los estudiantes participantes voluntarios de este estudio sean objeto de hostigamiento social. De ocurrir esto, si su padre, madre o encargado así lo desean, pueden ser atendidos por un estudiante practicante o internista de psicología de la UIPR-SG supervisado por un psicólogo profesional, quienes le brindarán sus servicios de forma gratuita.

El proceso de apoyo a esta investigación se realizará mediante los procedimientos y normas de la Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos de la UIPR-SG (CCSP). La CCSP ofrece sus servicios en un escenario académico supervisado. Los horarios son de lunes a viernes de 8:00 a.m. a 5:00 p.m. La colaboración de los profesionales en Psicología de esta clínica para esta investigación se describe como sigue:

- Las intervenciones con los sujetos en la investigación, de ser necesario, se realizarán por estudiantes practicantes e internos supervisados de la UIPR-SG, bajo la dirección del Dr. Alfred Soler Santos, con número de licencia profesional 7080.
- Los servicios que se ofrecerán serán: la primera intervención psicosocial, sesiones de desahogo y referidos a proveedores de salud mental.
- Los servicios de la CCSP serán destinados gratuitamente a estudiantes que participen en la investigación y cuyos consentimientos y

asentimientos informados estén firmados. Esto excluye, familiares y otros estudiantes del plantel escolar.

- Los servicios de la CCSP deberán ser coordinados por el investigador principal y el padre, madre o encargado del estudiante, comunicándose al (787) 264 – 1912 extensión 7713/ 7718 o escribiendo al correo electrónico institucional: clínica_psic@sangerman.inter.edu.
- Los servicios se realizarán en un periodo de 45 días desde la fecha de comienzo de la investigación.
- Los servicios e intervenciones se ofrecerán exclusivamente en las facilidades de la CCSP de la UIPR – SG edificio Harris Hall o mediante plataforma virtual preestablecida.

Para el maestro colaborador del estudio, su participación pudiera conllevar riesgo de ansiedad por cuanto exige un esfuerzo adicional a su labor usual.

Para subsanar este riesgo:

- El investigador principal coordinará una reunión previa a la implementación del proyecto con el maestro colaborador donde se explica que el proyecto investiga construcciones mentales que estudiantes pueden hacer para entender funciones exponenciales y logarítmicas y que no se centra en la didáctica del tópico. Además, se discutirá de manera global aspectos del contenido y de la técnica didáctica que se va a usar en el proyecto.

- El investigador principal va a acordar con el maestro colaborador reuniones donde analicen lo que sucedió en la clase anterior y como esto puede afectar la clase siguiente. El propósito de la reunión es principalmente para la evaluación de las actividades de aprendizaje propuestas, las cuales son experimentales. No debe entenderse en ningún momento que se está evaluando la intervención del maestro colaborador y así constará en todos los documentos de la investigación. Antes de la implementación en clase de cada actividad se van a discutir las soluciones, y posibles dificultades que tengan los estudiantes.
- El maestro colaborador puede retirarse del proyecto cuando así lo desee.
- En todo momento se respetará la libertad de cátedra del maestro colaborador.

La identidad del maestro colaborador no se da a conocer en ningún momento y todos los datos que se obtengan, incluyendo su entrevista estructurada, serán mantenidos en estricta confidencialidad y serán destruidos después de tres años.

V. Beneficios

El maestro colaborador tendrá el beneficio de conocer un nuevo enfoque para la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas y ponerlo en práctica en su salón de clases. La información de esta investigación podría conducir a mejorar en el futuro sus técnicas y estrategias de enseñanza en los cursos de Álgebra 2 y Precálculo I y II. El maestro colaborador va a estar en posición de conceptualizar con mayor efectividad y ofrecer a los estudiantes un entendimiento más profundo de las funciones exponencial y logarítmica del que usualmente obtendrían en un curso tradicional.

El maestro colaborador no recibirá ningún beneficio económico por participar en este estudio.

VI. Cláusula de confidencialidad

Esta investigación es con fines educativos. Durante el estudio no se pasa juicio sobre su ejecutoria como maestra de matemáticas, sólo se busca información sobre cómo los estudiantes participantes construyen su conocimiento. Se mantendrá la confidencialidad de su identidad y de la escuela donde trabaja. No se utilizará su nombre en el estudio.

Los resultados de esta investigación pueden ser publicados en revistas científicas de matemática educativa o ser presentados en un congreso de investigaciones sobre temas de educación matemática, pero la identidad suya no será divulgada. La información suministrada por usted en este estudio a través de los instrumentos de recolección de información será mantenida de

acuerdo con el documento normativo A – 1220 – 065 (Normas sobre la protección de los derechos de los sujetos humanos que participan en proyectos o en actividades de investigación).

Los datos crudos solo serán accedidos por el investigador principal y su comité de disertación en la Universidad Interamericana de Puerto Rico. Las notas y resultados que obtengan los estudiantes participantes en las Actividades de Enseñanza y Ejercicios de Práctica que completen como parte de este proyecto, las usará el maestro colaborador para evaluar a los estudiantes de la forma en que usualmente lo hace con todos sus estudiantes en sus cursos. El investigador principal tendrá acceso al trabajo o copia del trabajo de estos estudiantes con el fin de obtener información para el estudio. Los datos impresos se conservarán por tres años en un archivo con llave en el estudio del hogar del investigador principal. Al finalizar el tiempo requerido, se dispondrán los documentos, luego de ser triturados para reciclaje. Los datos digitales de grabaciones en audio se almacenarán en un disco duro externo que se encuentra en el estudio del hogar del investigador principal. Al finalizar el tiempo requerido se eliminarán los archivos con los datos.

La copia del consentimiento informado que firma el maestro colaborador será conservada en un archivo con llave en el estudio del hogar del investigador principal y se destruirá después de tres años.

VII. Compensación

En esta investigación, no habrá ningún tipo de compensación económica.

VIII. Voluntariedad

La participación de usted en este estudio es libre y voluntaria.

IX. Responsabilidad del participante

Su participación en este estudio debe ser voluntaria. Llevará a cabo y/o coordinará las actividades que se describen en la sección III de este documento (Procedimientos).

X. Aceptación del participante

Certifico que he leído este documento en el que se me explica los procedimientos y condiciones para participar en esta investigación y acepto participar voluntariamente en la misma.

 Fecha 24/09/2021
Firma del participante

Firma del Investigador

De tener alguna duda o pregunta con relación a esta investigación o sus derechos como participante puede comunicarse con:

IAUPR Institutional Review Board
PO BOX 363255 SAN JUAN PR 00936-3255
787-766-1912 ext. 2432

De surgir alguna otra duda o pregunta puede comunicarse con el investigador en:

Profesor Tomás Díaz Berríos Teléfono celular: 787 – 380 – 2495
tomasmat301@gmail.com

Investigador Principal

Dr. Rafael Martínez Planell
rmplanell@gmail.com

Director de Tesis

**[NOTA: EL PARTICIPANTE TIENE DERECHO A RECIBIR COPIA DE
ESTE DOCUMENTO FIRMADO POR AMBAS PARTES]**

El maestro colaborador podrá solicitar una copia de este consentimiento al investigador principal por medio de llamada telefónica o por medio de correo electrónico.

Apéndice I



Universidad Interamericana de Puerto Rico

Recinto de San Germán

Departamento de Estudios Graduados

Programa Doctoral (Ed. D) Matemáticas

DOCUMENTO DE ASENTIMIENTO INFORMADO PARA ESTUDIANTES PARTICIPANTES

Título de la Investigación: La enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria

Nombre del Investigador: Tomás Díaz Berríos

I. Propósito de la Investigación

El propósito de esta investigación es: (1) Estudiar las construcciones mentales que hacen los estudiantes para entender función exponencial y función logarítmica, aplicando la teoría APOE para ello. (2) Estudiar si la enseñanza utilizando el ciclo ACE (actividades en grupos, discusión en clase, y ejercicios), contribuye al desarrollo de la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria.

II. Participantes

Se seleccionará un grupo de estudiantes de cada una de dos escuelas privadas de nivel superior diferentes en Puerto Rico para que participe en el estudio. En cada una de las escuelas se seleccionarán 8 estudiantes voluntarios de duodécimo grado que estén tomando el curso de Precálculo. Para seleccionar a los estudiantes participantes se usará el orden de llegada de los documentos consentimiento y asentimiento informado firmados y unas categorías (que se describen más adelante) basadas en el aprovechamiento académico en cursos previos de matemáticas.

III. Procedimientos

- 1) El maestro entregará al estudiante un documento de asentimiento informado para asegurar que la participación del estudiante es enteramente voluntaria y dejarle saber que si prefiere no participar esto no afectará su nota en el curso.
- 2) El maestro enviará con el estudiante un documento de consentimiento informado dirigido a padre, madre o encargado para su autorización.
- 3) Se van a escoger ocho estudiantes para participar en el estudio usando el orden de entrega de los documentos firmados y tres categorías relacionadas al aprovechamiento académicos de los estudiantes en el curso de matemática previo: los primeros dos estudiantes con promedio entre 90% y 100%, los primeros cuatro estudiantes con promedio entre

80% y 89%, los primeros dos estudiantes con promedio entre 70% y 79%.

- 4) Se estarán reuniendo a los estudiantes participantes en dos grupos de cuatro estudiantes en el periodo lectivo regular en que los estudiantes toman el curso de Precálculo. Los otros estudiantes que estén tomando el curso de Precálculo también estarán divididos en grupos de cuatro estudiantes.
- 5) La participación del estudiante consistirá en contestar 11 actividades de aprendizaje, 11 actividades ejercicios de prácticas para realizar en el hogar, y una entrevista de una hora al finalizar el tópico. Todos los estudiantes en el salón de clases, incluyendo los estudiantes no participantes de este estudio, contestarán las mismas actividades en el período lectivo del curso y tendrán los mismos ejercicios de práctica asignados para hacer en el hogar. La única diferencia es que las discusiones en los dos grupos en que estarán ubicados los estudiantes participantes de este estudio se van a grabar en audio, y se va a sacar copia del trabajo escrito de estos grupos, para que luego puedan ser analizados por el investigador. Además, el investigador principal estará presente interaccionando con los estudiantes participantes, mientras el maestro regular del curso interacciona con los grupos de estudiantes no participantes.

- 6) El investigador principal llevará a cabo entrevistas semiestructuradas al finalizar el tópico de funciones exponenciales y logarítmicas en un salón privado del plantel escolar. La entrevista a cada estudiante durará aproximadamente una hora.
- 7) Las grabaciones en audio de las actividades en el salón de clases y las entrevistas semiestructuradas serán realizadas por el investigador principal.
- 8) El estudiante participante puede dejar de participar en el estudio si así lo desea. Si usted como estudiante participante voluntario desiste de participar en el estudio continuará tomando la clase de Precálculo de forma normal. Su nota en el curso no se verá afectada. A usted no se le grabará su discusión en los grupos de estudio donde participará. A usted no se le administrará la entrevista semiestructurada al finalizar el tratamiento del estudio.
- 9) El investigador principal tendrá acceso a su rendimiento académico en el curso de Precálculo.
- 10) El investigador principal estará presente en la sala de clases grabando en audio las aportaciones que usted facilite como estudiante participante durante el tratamiento del estudio.

IV. Riesgos

La probabilidad es mínima de que algún estudiante participante se vea adversamente afectado por el proyecto. Entendemos que la investigación no involucra ningún riesgo diferente de lo de la asistencia regular a la escuela. La razón para esto es que todos los estudiantes en su salón de clase estarán usando los mismos materiales para estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas. La única diferencia es que la discusión en grupo de estudiantes participantes se va a grabar en audio, y de los otros estudiantes no. De darse una situación de “bullying”, esto puede representar un alto riesgo para el estudiante; por eso se le da al estudiante diferentes opciones. Situaciones de acoso de estudiantes, hostigamiento social o ansiedad, por ejemplo, que a nuestro entender puedan ser consecuencia del proyecto, se pueden tratar recordando al estudiante que está libre de dejar el proyecto cuando quiera, y dándole conocimiento de la situación al maestro colaborador, para que la trate con los protocolos y prácticas usuales de la escuela. No obstante, pudiera darse el caso que los estudiantes participantes voluntarios de este estudio sean objeto de hostigamiento social. De ocurrir esto, si su padre, madre o encargado así lo desean, pueden ser atendidos por un estudiante practicante o internista de psicología de la UIPR-SG supervisado por un psicólogo profesional, quienes le brindarán sus servicios de forma gratuita.

El estudio no constituye ningún riesgo para la nota del estudiante porque el contenido de la entrevista semiestructurada solo es accesible al investigador principal.

V. Beneficios

Los estudiantes participantes tendrán el beneficio de experimentar una forma innovadora para la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas. Se proyecta que los estudiantes participantes van a estar en posición de obtener un entendimiento más profundo de las funciones exponencial y logarítmica del que usualmente obtendrían en un curso tradicional. La información de esta investigación podría conducir a mejorar en el futuro las técnicas y estrategias de enseñanza en los cursos de Álgebra 2 y Precálculo I y II en una escuela pública o privada de nivel superior de Puerto Rico. Los estudiantes participantes tendrán el beneficio de ayudar a mejorar la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica.

El estudiante participante no recibirá ningún beneficio económico por participar en este estudio.

VI. Cláusula de confidencialidad

Esta investigación es con fines educativos. Durante el estudio, sólo se busca información sobre cómo los estudiantes participantes construyen su conocimiento. Se mantendrá la confidencialidad del estudiante y de la escuela donde estudia. No se utilizará el nombre del estudiante en el estudio.

Los resultados de esta investigación pueden ser publicados en revistas científicas de matemática educativa o ser presentados en un congreso de investigaciones sobre temas de educación matemática, pero la identidad del estudiante no será divulgada. Toda la información suministrada por el estudiante en este estudio será mantenida de acuerdo con el documento normativo A – 1220 – 065 (Normas sobre la protección de los derechos de los sujetos humanos que participan en proyectos o en actividades de investigación).

Los datos crudos solo serán accedidos por el investigador principal y su comité de disertación en la Universidad Interamericana de Puerto Rico. Las notas y resultados que obtengan los estudiantes participantes en las Actividades de Enseñanza y Ejercicios de Práctica que completen como parte de este proyecto, las usará el maestro colaborador para evaluar a los estudiantes de la forma en que usualmente lo hace con todos sus estudiantes en sus cursos. El investigador principal tendrá acceso al trabajo o copia del trabajo de estos estudiantes con el fin de obtener información para el estudio. Los datos impresos se conservarán por tres años en un archivo con llave en el estudio del hogar del investigador principal. Al finalizar el tiempo requerido, se dispondrán los documentos, luego de ser triturados para reciclaje. Los datos digitales de grabaciones en audio se almacenarán en un disco duro externo que

se encuentra en el estudio del hogar del investigador principal. Al finalizar el tiempo requerido se eliminarán los archivos con los datos.

La copia del consentimiento informado que firma el padre, madre o encargado será conservada en un archivo con llave en el estudio del hogar del investigador principal.

VII. Compensación

En esta investigación, no habrá ningún tipo de compensación económica.

VIII. Voluntariedad

Su participación en este estudio es libre y voluntaria. Su no participación en este estudio no resultará en ninguna penalidad o no afectará su nota en el curso de Precálculo de ninguna manera.

IX. Responsabilidad del estudiante participante

Las responsabilidades del estudiante participante son: contestar 11 actividades de aprendizaje trabajando en grupo, contestar 11 actividades de ejercicios de prácticas para realizar en el hogar y contestar una entrevista semiestructurada al finalizar el tratamiento del estudio.

X. Aceptación del estudiante participante

Certifico que he leído este documento en el que se me explica los procedimientos y condiciones para participar en esta investigación y acepto participar voluntariamente en la misma.

Firma del participante

Fecha _____

Firma del Investigador

Fecha _____

De tener alguna duda o pregunta con relación a esta investigación o sus derechos como participante puede comunicarse con:

IAUPR Institutional Review Board
PO BOX 363255 SAN JUAN PR 00936-3255
787-766-1912 ext. 2432

De surgir alguna otra duda o pregunta puede comunicase con el investigador en:

Profesor Tomás Díaz Berríos Teléfono celular: 787 – 380 – 2495
tomasm301@gmail.com

Investigador Principal

Dr. Rafael Martínez Planell
rmplanell@gmail.com

Director de Tesis

[NOTA: EL PARTICIPANTE TIENE DERECHO A RECIBIR COPIA DE ESTE DOCUMENTO FIRMADO POR AMBAS PARTES]

El estudiante participante podrá solicitar una copia de este consentimiento al investigador principal por medio de llamada telefónica o por medio de correo electrónico.

Apéndice J



Universidad Interamericana de Puerto Rico
Recinto de San Germán
Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos

22 de noviembre de 2021

Sr. Tomás Díaz Berrios
Estudiante doctoral Programa de Educación Matemática
B00120354

Un cordial saludo,

Señor Díaz Berrios, deseamos comunicarle que la Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos (CCSP) de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán apoyará su investigación titulada: *La enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas en estudiantes de secundaria*. El proceso está avalado por el Decanato de Asuntos Académicos y el director del Departamento de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades de la UIPR-SG.

La colaboración para su investigación deberá cumplir con los siguientes requerimientos:

- Autorización de la Junta de Revisión Institucional con las fechas establecidas.
- Consentimientos y asentamientos informados de los sujetos en la investigación y sus padres o tutores.
- Plan de implementación de la investigación (Calendarios y lugares).

El proceso de apoyo a su investigación se realizará mediante los Procedimientos y Normas de la Clínica de Consultoría y Servicios Psicológicos de UIPR-SG. La CCSP ofrece sus servicios en un escenario académico supervisado. Los horarios son de lunes a viernes de 8:00 am a 5:00 pm.

Nuestra colaboración para su investigación es descrita en los siguientes procedimientos:

- Las intervenciones con los sujetos en la investigación de ser necesario, se realizarán por estudiantes practicantes e internos supervisados de la UIPR-SG, bajo la dirección del Dr. Alfred Soler Santos, con número de licencia profesional 7080.

- Los requerimientos de los servicios serán la primera intervención psicosociales, sesiones de desahogo y referidos a proveedores de salud mental.
- Los servicios de la CCSP serán destinados gratuitamente a estudiantes que participen en la investigación bajo los consentimientos y asentimientos informados firmados. Esto excluye, familiares y otros estudiantes del plantel escolar.
- Los servicios de la CCSP deberán ser coordinados por el encargado de la investigación, entendiéndose usted y los padres de los estudiantes, comunicándose al 787-264-1912 extensión 7713-7718 o escribiendo al correo electrónico institucional: clinica_psic@sangreman.inter.edu
- Los servicios se realizarán en un periodo de 45 días desde la fecha de comienzo de la investigación. De requerir extensión, deberá solicitarlo por escrito y avalado por su Comité de Diseño.
- Los servicios e intervenciones se ofrecerán exclusivamente en las facilidades de la CCSP en UIPR-SG, edificio Harris Hall o mediante plataforma virtual preestablecida.

Para nosotros será un placer colaborar con su proceso de investigación. Agradándole mucho éxito.

Cordialmente,



Prof. Vilma S. Martínez Toro
Decana Asuntos Académicos, UIPR-SG.



Dr. Kenneth Di Lorenzo
Director del Departamento de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades, UIPR.



Dr. Alfredo Soler Santos
Director CCSP, UIPR-SG

Apéndice K

Actividad de Aprendizaje 0 (A0)

Repaso de exponentes enteros

(Actividad 0A)

Notación Exponencial

Definición: Para cualquier número natural n ,

$$b^n = b \times b \times b \dots b.$$



n factores de b .

Ejemplos de expresiones algebraicas en notación exponencial

$$b = b^1$$

Si no se da el exponente es b a la primera potencia.

$$b \times b = b^2$$

b al cuadrado o a la segunda potencia.

$$b \times b \times b = b^3$$

b al cubo o a la tercera potencia.

$$b \times b \times b \times b = b^4$$

b a la cuarta potencia.

$$b \times b \times b \times b \times b = b^5$$

b a la quinta potencia.

(Actividad 0B) Repasando aún más la notación exponencial

1. Escribe cada uno de estos enunciados en notación exponencial. No lleve a cabo la multiplicación.

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

b) $1.02 \times 1.02 \times 1.02 \times 1.02$

c) $0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7$

d) $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$

e) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

f) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$

2. Expande cada una de las siguientes expresiones para expresarlas sin usar notación de exponentes, como productos repetidos. No simplifique.

a) $3^5 \times 2^4$

b) $a^6 \cdot b^4$

c) $9 \cdot 4^7$

d) $(5b^3)^4$

e) $3(b^5)^2$

3. Evalúa cada una de las siguientes expresiones exponenciales.

a) 6^3

b) $2 \cdot 5^4$

c) $(2 \cdot 5)^4$

d) $(2b)^3$

e) $(3ab)^3$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

4. Evalúe cada expresión.

a) $3^{212} \cdot 3^{300}$

Reflexione sobre el problema en la parte a y explique en sus propias palabras por qué en general, $b^n b^m = b^{n+m}$.

b) $\frac{5^{128}}{5^8}$

Reflexione sobre el problema en la parte b y explique en sus propias palabras por qué en general, $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$.

c) $(5^{200})^6$

Reflexione sobre el problema en la parte b y explique en sus propias palabras por qué en general, $(b^n)^m = b^{n \times m}$

d) $\frac{1.08^9}{1.08^9}$

Reflexione acerca del problema anterior y explique su relación con la fórmula $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ y con la definición del exponente cero.

e) 1.04^0

(Para esta expresión exponencial, justifiquen la definición del exponente cero basándose en otras propiedades de exponentes.)

f) $(6b)^3$

Reflexione acerca del problema anterior y explique en sus propias palabras por qué en general es cierto que $(ab)^n = a^n b^n$

g) $(5^{192})^6 \cdot (5^{278})^9$

5. Exprese sin usar exponentes negativos:

a) 5^{-2}

d) $\frac{1}{b^{-4}}$

b) b^{-4}

e) $b^{-4}b^6$

c) $\frac{1}{5^{-2}}$

f) $b^{-6}b^4$

6. Considere la expresión $b^n b^m = b^{n+m}$.

- a) Indique si es o no es válida en el caso que una de n o m es cero, o que ambas n y m son cero. Explique su respuesta.
- b) Indique si es o no es válida en el caso que $m = -n$. Explique su respuesta.

7. Considere la expresión $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$.

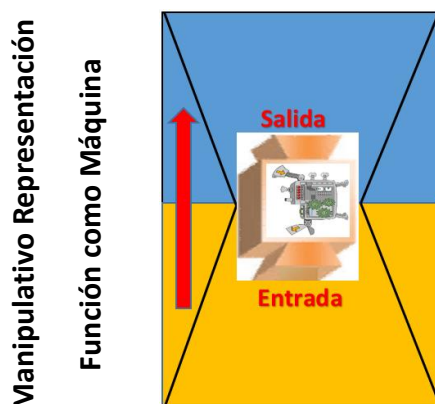
- a) Indique si es o no es válida en el caso que una de n o m es cero, o que ambas n y m son cero. Explique su respuesta.
- b) Indique si es o no es válida en el caso que $m = n$. Explique su respuesta.
- c) Indique si es o no es válida en el caso que $m > n$. Explique su respuesta.

Apéndice L

Actividad de Aprendizaje 1 (A1)

(Actividad 1A) Estudiando sucesiones exponenciales, considerando “el moverse a la derecha en pasos unitarios”

Instrucciones:



Una función es una relación de correspondencia entre un conjunto de entradas y un conjunto de salidas, de forma tal que a cada elemento en el conjunto de entradas le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto de salidas. El conjunto de entradas también se llama dominio, y el conjunto de salidas también se conoce como campo de valores o alcance.

Una función se puede pensar como una máquina que transforma entradas en salidas.

En estas actividades de aprendizaje utilizarás como manipulativo una ficha en la cual la parte inferior se da un elemento de entrada y en la parte superior de la ficha se da el elemento de salida correspondiente.



¿Qué es el globo aerostático de Jayuya?

Básicamente se trata de un enorme globo aerostático (lleno de helio) que está atado al suelo con capacidad para que hasta 30 personas disfruten de las increíbles vistas de Jayuya y la isla. Es una experiencia totalmente única aquí en Puerto Rico y actualmente solo hay unos 20 lugares alrededor del mundo que ofrecen tal experiencia.



El globo aerostático en Jayuya es el más alto del mundo al estar ubicado en una altura de 975.36 m en una estación base sobre el nivel del mar y cuando esté en pleno vuelo, los pasajeros volarán a unos 152.4 m sobre el suelo, lo que equivale a una altura de alrededor de 1,127.76 m sobre el nivel del mar. El tiempo de vuelo es de alrededor de 8 a 15 minutos.

En el caso del globo aerostático de Jayuya una ficha como $\begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$ diría que al transcurrir 3 minutos de vuelo (entrada) la altura del globo era aproximadamente 20 m (salida).

En esta actividad tendrás que buscar patrones utilizando las fichas provistas para completar diferentes listas y descubrir las reglas que están ocultas en cada una de ellas. La actividad te desafiará continuamente.

Primera Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático, duplicándose por minutos de vuelo en el pueblo de Ponce

Suponga que en el pueblo de Ponce se proyecta que el factor multiplicativo o de crecimiento de la altura de un globo aerostático, es tal que la altura en metros se duplica por minutos como muestran algunos de los datos del estudio.

1. Ordena las fichas utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas que faltan.

Altura del globo aerostático en (metros)	1	2		8		32		128		512					
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3		5	6	7		9	10			13	14

- a. ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?
- b. La progresión ¿aumenta o disminuye?
- c. ¿Cuál era la altura de la cesta del globo aerostático cuando se comenzaron a tomar datos?

Segunda Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático, por minutos de vuelo en el pueblo de Mayagüez

En el pueblo de Mayagüez un modelo matemático proyecta que hay un factor multiplicativo constante (o factor de crecimiento) en la altura de un globo aerostático, o sea, que la altura del globo aerostático en metros se multiplica cada minuto por la misma constante.

2. Ordena las fichas en este segundo estudio utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas. Los datos que se dan en la tabla del modelo

matemático han sido redondeados a dos lugares decimales. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos?

Altura (metros)	4	4.32	4.67	5.04											
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- ¿Cuál era la altura de la cesta del globo aerostático cuando se comenzaron a tomar datos?
 - ¿Cómo se halla el factor multiplicativo por minuto de este modelo usando los datos?
 - ¿Cómo comparas la progresión de la altura en (metros) de un globo aerostático en Ponce y el primer modelo de Mayagüez? ¿Qué rol juega el factor multiplicativo en esto?
3. La siguiente tabla corresponde a otro modelo para Mayagüez, con otro factor multiplicativo.

Altura (metros)	962	1,154.40	25,611.65	
Tiempo (minutos)	27	28	45	46

- ¿Cuál es el factor multiplicativo por minutos?

Tercera Ronda del Estudio sobre Estimación de la Altura de un Globo Aerostático, por minutos de vuelo.

Suponga que luego de varios minutos, en el pueblo de Ponce un nuevo modelo matemático proyecta que el factor multiplicativo por minutos de vuelo, de la altura

en (metros) de un globo aerostático es de 0.70 como muestran algunos de los datos del estudio (aproximados a dos lugares decimales).

4. Ordena las fichas en esta ronda del estudio y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos?

Altura (Metros)	1,724	1,206.8												
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

- ¿Qué sucede diferente en esta ronda a las rondas anteriores? ¿Qué tiene que ver el factor multiplicativo con esto?
- ¿Si se quiere que la altura en (metros) de un globo aerostático decrezca más rápidamente, qué puede decirse del factor multiplicativo?

(Actividad 1B) Analizando las tres rondas del estudio altura en (metros) de un globo aerostático en distintos pueblos de Puerto Rico.

Instrucciones:

Utilizando los hallazgos en las rondas 1, 2 y 3 del estudio:

- Explica en tus propias palabras lo que has aprendido sobre el factor multiplicativo en las tres rondas del estudio altura en (metros) de un globo aerostático en distintos pueblos de Puerto Rico.
- ¿Qué puede decirse si el factor multiplicativo de una cantidad que cambia exponencialmente es mayor que 1? ¿Y si el factor multiplicativo es menor de 1? Explica.
- Supongamos que el pueblo de Barranquitas la altura inicial de la cesta del globo aerostático es de 2 metros con respecto a la superficie de la tierra con un factor multiplicativo de 3 y que el pueblo de Yauco tiene una altura inicial de 5 metros con un factor multiplicativo de 2.

¿Qué juega un papel más importante en la altura de un globo aerostático a largo plazo, la altura inicial de la cesta del globo aerostático o el factor multiplicativo de cambio? Justifica tu respuesta.

4. Suponga que la cesta de un globo aerostático en el pueblo de Bayamón tiene una altura inicial de 14 metros, con un factor multiplicativo por minutos de 1.02, y la cesta de un globo aerostático en el pueblo de Morovis tiene una altura inicial de 4 metros con un factor multiplicativo por minutos de 1.07. ¿Será necesariamente cierto que, a través del tiempo de vuelo, la altura del globo aerostático de Bayamón va a ser más que la altura del globo aerostático de Morovis? Justifica tu contestación.
5. ¿Qué aprendiste sobre la cantidad de períodos de tiempo, altura inicial de la cesta de un globo aerostático, factor multiplicativo y la altura total de un globo aerostático? ¿Cuál es la relación entre estas diferentes variables en un modelo matemático exponencial? (Escribe una fórmula relacionando todas esas variables.)

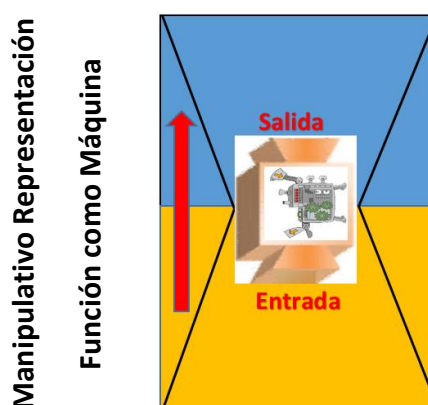
Apéndice M

Actividad de Aprendizaje 2 (A2)

Estudiando sucesiones exponenciales, considerando “el moverse a la derecha en saltos”

(Actividad 2A) Buscando patrones con fichas sobre cómo se puede estimar la altura de un globo aerostático en los pueblos de San Juan, Caguas y Guaynabo

Instrucciones:



En esta actividad tendrás que buscar patrones utilizando las fichas provistas para completar diferentes listas. Necesitamos que nos ayudes a completar las mismas y a descubrir las reglas que están ocultas en cada una de ellas. La actividad te desafiará continuamente.

Primera Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático, por minutos de vuelo.

Suponga que en el pueblo de San Juan se proyecta un aumento en la altura en (metros) de un globo aerostático por minutos de vuelo, como predicen algunos de los datos que se obtienen de un modelo matemático. Este modelo asume crecimiento exponencial de la altura, o sea, asume que hay un factor multiplicativo constante.

1. Ordena las fichas en este tercer estudio y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas. Los datos que se dan en la tabla han sido redondeados a dos lugares decimales.

- a. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos?

Altura (metros)	3	5.25	9.19	16.08						
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	10	15	20	25

- b. ¿Cómo se pueden usar los datos provistos para hallar el factor multiplicativo por minutos?
- c. ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada 5 minutos (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?
- d. ¿Cómo se puede buscar un factor multiplicativo de cada $\frac{1}{4}$ de hora (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?
- e. ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)? Compútalo de dos maneras diferentes (debe dar lo mismo), observe que los períodos de tiempo se dan en minutos.
- f. ¿Cuál es el factor multiplicativo por hora (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?
- g. ¿Si el factor de crecimiento continúa igual, que altura tendrá el globo aerostático con respecto al suelo luego de haber transcurrido 1 hora (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?

Segunda Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático por minutos de vuelo en el pueblo de Caguas

Si en el pueblo de Caguas se proyecta que el factor multiplicativo por minutos de vuelo de la altura de un globo aerostático es de 1.05 como muestran algunos de los datos de un estudio.

1. Ordena las fichas utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas que faltan.

Altura (Metros)	16							
Tiempo (minutos)	0	1	15	30	45	60	75	90

2. ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada 15 minutos?

- a. ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?
- b. ¿Cuál fue la altura inicial de la cesta del globo aerostático? ¿Puedes aproximar la altura en (metros) del globo aerostático en un intervalo de tiempo de 76 minutos? 2 horas? Explica tu respuesta.

(Actividad 2B) Analizando las dos rondas del Estudio Estimación de la Altura de un Globo aerostático

1. ¿Cómo puede hallarse un factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora a partir de un factor multiplicativo por minutos? ¿Cómo puede hallarse un factor multiplicativo por hora a partir de un factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora?
2. Si conoces un factor multiplicativo por minutos de una cantidad que cambia exponencialmente, ¿cómo hallas un factor multiplicativo de cada $\frac{1}{4}$ de hora, $\frac{1}{2}$ hora, 1 hora, diario, semanal? Explica tu respuesta.

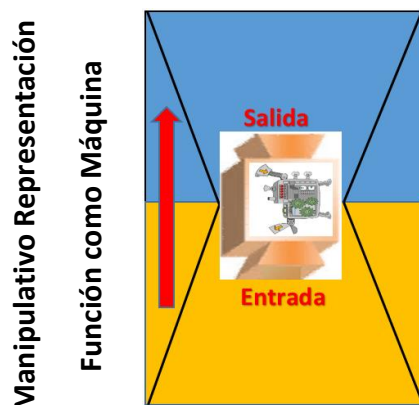
Apéndice N

Actividad de Aprendizaje 3 (A3)

Extender función exponencial a los enteros

(Actividad 3A) Buscando patrones con fichas sobre cómo se puede estimar la altura de un globo aerostático, en los pueblos de Isabela, Luquillo, Maunabo y San Sebastián.

Instrucciones:



En esta actividad tendrás que buscar patrones utilizando las fichas provistas para completar diferentes listas. Necesitamos que nos ayudes a completar las mismas y a descubrir las reglas que están ocultas en cada una de ellas. La actividad te desafiará continuamente.

Primera Ronda de un Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático por minutos de vuelo en el pueblo de Isabela

Asuma que el pueblo de Isabela un globo aerostático se encontraba en una altura de 384 metros 4 minutos luego de comenzar a tomar el tiempo y que un modelo matemático predice que la altura del globo aerostático, se duplica cada minuto.

1. Ordena las fichas utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha y encuentra un patrón para estimar la altura del globo aerostático en el tercer minuto luego de comenzar a tomar el tiempo, segundo minuto, primer minuto, y al inicio, completando los términos de las otras fichas que faltan.

Altura (Metros)					384
Tiempo (minutos luego de comenzar a tomar tiempo)	0	1	2	3	4

- ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?
- ¿Cuál es la altura de la cesta del globo aerostático con respecto a la superficie del suelo, al momento de comenzar a tomar datos (minutos 0)?
- ¿Puedes anticipar la altura en metros del globo aerostático en un intervalo de tiempo de 6 minutos? Explica tu respuesta.
- ¿Cómo crece la progresión?
- ¿Cuál es la altura de la cesta de un globo aerostático que puede esperarse que hubiese un minuto de vuelo antes, dos minutos de vuelo antes y tres minutos de vuelo antes de comenzar a tomar datos? Completa la tabla.

Altura (Metros)				24
Tiempo (minutos)	-3	-2	-1	0

- La siguiente sucesión crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2.
 - Complete la tabla asegurándose que el factor multiplicativo sea 2.

Salidas								4	8	16
Entradas	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

- ¿Hay relación entre las entradas negativas con sus salidas correspondientes y lo que usted conoce de exponentes negativos? Explique.
- ¿Hay relación entre la entrada 0 con su salida correspondiente y lo que usted conoce acerca del exponente cero? Explique.

- d. Si la altura de la cesta de un globo aerostático inicialmente se encuentra a 1.5 m sobre la superficie del suelo, ¿Cómo se ve la tabla de una sucesión que crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2 y que tiene un valor inicial de 3? ¿Cómo compara con la tabla en la parte a?
- e. Una propiedad de exponentes dice que $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$. Aplique esta propiedad al caso $\frac{b}{b}$ y explique por qué esto nos obliga a definir b^0 de la forma usual.
- f. Una propiedad de exponentes dice que $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$. Aplique esta propiedad al caso en que $m=0$ y $n=1$, y explique por qué esto nos obliga a definir b^{-1} de la forma usual.
- g. Una propiedad de exponentes dice que $b^{n+m} = b^n b^m$. Use esta propiedad para inventarse argumentos que obligan a que se definan el exponente 0 como $b^0 = 1$ y exponentes negativos como $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

Segunda Ronda de un Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático por minutos en una ciudad.

Un modelo matemático reflejó que en una ciudad la altura de un globo aerostático aumenta exponencialmente.

3. Ordena las fichas en este segundo estudio utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha.
- a. ¿Cuál es el factor multiplicativo por hora de vuelo?
Complete la tabla aproximando a dos lugares decimales.

Altura (metros)					474.89			4,233	5079.60
Tiempo (horas)	0	1	10	20	30	40	41	42	43

- b. ¿Cómo se usa el factor multiplicativo por hora de vuelo para hallar el factor multiplicativo de cada 10 horas de vuelo?
- c. Usa la altura del globo aerostático al transcurrir 30 horas de vuelo y el factor multiplicativo de cada 10 horas de vuelo para hallar la altura del globo aerostático al transcurrir 40 horas de vuelo. Te debe dar la misma altura del globo aerostático que ya habías computado anteriormente.
- d. ¿Cuál era la altura del globo aerostático al transcurrir 7 horas de vuelo?
- e. Use notación exponencial para llenar las siguientes tablas. Asuma que el crecimiento es exponencial.

Salida				1	1.05		
Entrada	-30	-20	-10	0	1	10	20

Salida				3	3.15		
Entrada	-30	-20	-10	0	1	10	20

(Actividad 3B) Analizando lo aprendido en esta actividad

Instrucciones:

1. Explica en tus propias palabras lo que has aprendido sobre el factor multiplicativo en esta actividad.
2. Explica en tus propias palabras lo que has aprendido acerca del exponente cero y de exponentes enteros negativos.

Apéndice O

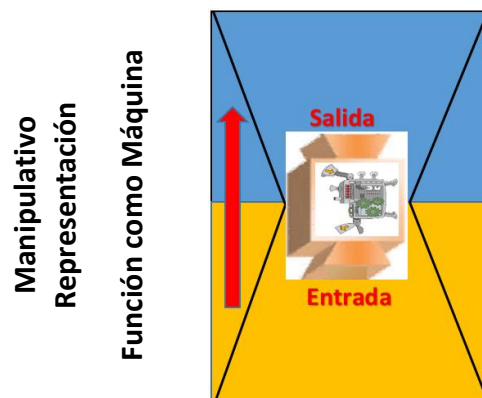
Actividad de Aprendizaje 4 (A4)

Repaso de notación funcional

Nota al calce: La actividad # 4 se omitió y no se implementó en la sala de clases en el estudio ya que los estudiantes demostraron en las actividades # 1 y # 2 tener noción de notación de función.

(Actividad 4A)

Instrucciones:



Ejemplo:

1. Una función f está definida por la fórmula $f(n) = 2^n$.

a. Evalúe la función para: $f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8), f(9)$ y $f(10)$.

$f(n)$	1	2	4								
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

b. Evalúe la función exponencial $g(n) = 4 \cdot 2^n$ para los elementos dados del dominio.

Evalúe la función para: $g(1), g(2), g(3), g(4)$ y $g(5)$.

$g(n)$	4	8	16			
n	0	1	2	3	4	5

- c. Compara la tabla de valores del enunciado b con la tabla de valores del enunciado a. ¿Qué observa?
2. Escribe una posible fórmula para la función representada por la tabla de la derecha.

$$q(\square) = \square * \square^{\square}$$

$q(n)$	2	6	18	54
n	0	1	2	3

3. Asumamos que el sueldo diario de un guía turístico que opera el globo aerostático en el pueblo de Jayuya es de 25 dólares más 10 dólares por cada persona que se monte en la cesta de metal del globo aerostático. El enorme globo aerostático que está atado al suelo tiene una capacidad para que hasta 30 personas puedan abordar en la cesta y disfruten de las increíbles vistas de Jayuya y la isla.

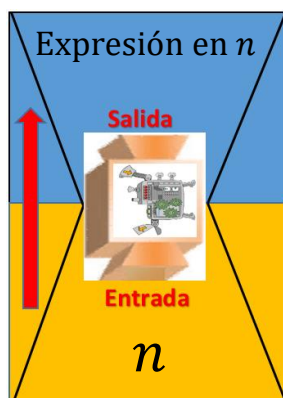
Salida (salario diario en dólares)	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155
Entrada (número de turistas que se montan en la cesta del globo aerostático)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

- a. Explica por qué esta no es una tabla con datos de crecimiento exponencial. Puedes considerar: si la notación funcional $s(n)$ representa la salida (salario) que corresponde a una entrada n (número de turistas) entonces:

$$s(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$s(10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. Si se usa la variable n para representar una entrada cualquiera en el manipulativo:



Encuentre un modelo matemático, una fórmula o expresión en términos de n (número de personas que abordaron la cesta del globo aerostático) en notación de función que modele el sueldo diario $S(n)$ (salida correspondiente o salario diario) de un guía turístico que opera el globo aerostático en el pueblo de Jayuya.

$$s(\square) = \square * \square + \square$$

4. ¿Cuánto gana en un día el guía u operador del globo aerostático en el pueblo de Jayuya si le brinda sus servicios a 56 personas que aborden la cesta de metal del globo aerostático?

(Actividad 4B) Modelo del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Aerostático, si la altura del globo se duplica por minutos

Suponga que en el pueblo de Ponce un modelo matemático proyecta que la altura inicial del canasto de un globo aerostático con respecto a la superficie de la tierra es de 5 metros y que el factor multiplicativo o de crecimiento de la altura del globo aerostático se duplica por cada minuto de vuelo como muestran algunos de los datos de un estudio.

Salida (altura en metros)	5	10	20	40	80	160	320	640	1,280	2,560	5,120	10,240	20,480	40,960
Entrada (número de minutos de vuelo desde que se comienzan a tomar datos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

¿Cómo podemos construir cualquier ficha de la tabla que muestra los datos del estudio? Es decir, encuentra una fórmula en términos de la variable n que cuando sustituyas valores de entrada por la n resulte en los valores de salida correspondientes. Verifica la fórmula que encuentres usando datos de la tabla. (Sugerencia: usa notación exponencial)



Apéndice P

Actividad de Aprendizaje 5 (A5)

Actividad Repaso de Exponentes que son Fracciones Unitarias de la forma $\frac{1}{n}$ ó

Exponentes que son Fracciones no Unitarias de la forma $\frac{m}{n}$

(Actividad 5A) Repasando exponentes que son fracciones unitarias de la forma $\frac{1}{n}$

Instrucciones: Tanteando con la calculadora TI – nspire cx CAS aproxima a dos lugares decimales la solución de los siguientes dos problemas.

1. ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo nos da 7?
2. ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo nos da 45?

Definición

La potencia $\frac{1}{2}$ de un número no negativo r es un número no-negativo a que multiplicado por sí mismo da r . Note que, por definición, a es no-negativo y $a \cdot a = r$, equivalentemente, $a \geq 0$ y $a^2 = r$.

La potencia $\frac{1}{2}$ de un número r se denota $r^{\frac{1}{2}}$.

Ejemplos:

$16^{\frac{1}{2}}$ pues $4 \cdot 4 = 16$ y 4 es no-negativo.

$0.16^{\frac{1}{2}} = 0.4$ ya que $(0.4)(0.4) = 0.16$ y 0.4 es no negativo.

3. Utiliza la calculadora (sin tantear) para aproximar un número que multiplicado por sí mismo de 42.

(Actividad 5B) Repasando potencias $\frac{1}{3}$

Comparar aproximaciones de potencias $\frac{1}{3}$ no exactas de números reales a la centésima más cercana utilizando la calculadora

Instrucciones: Sin utilizar una calculadora estima las potencias $\frac{1}{3}$ de los siguientes números reales que no son potencias $\frac{1}{3}$ perfectas.

1. ¿Entre qué dos números enteros consecutivos se encuentra la potencia $\frac{1}{3}$ de 15?
2. Aproxima a la centésima más cercana tanteando con la calculadora (utilizando potencias racionales unitarias) un número que multiplicado por sí mismo tres veces da 15.

Luego utiliza la calculadora para comparar los valores que obtuviste de la potencia $\frac{1}{3}$ de 15 tanteando con los cálculos obtenidos utilizando potencias fraccionarias unitarias en la calculadora.

3. ¿Entre qué dos enteros consecutivos se haya $685^{\frac{1}{3}}$? Tanteen hasta que el valor que hallen de $685^{\frac{1}{3}}$ esté correcto a la centésima más cercana.



Definición

La potencia $\frac{1}{3}$ de un número r es un número a que al multiplicarlo por sí mismo tres veces ($a \times a \times a$) es igual a r . Equivalentemente, la potencia $\frac{1}{3}$ de un número r es un número a tal que $a^3 = r$. La potencia $\frac{1}{3}$ de r se denota $r^{\frac{1}{3}}$.

Ejemplos:

$$8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \text{ya que } 2^3 = 8$$

$$0^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \text{ya que } 0^3 = 0$$

1. Aproxima a dos lugares decimales, un número que multiplicado por sí mismo tres veces da 17 (usando la calculadora, pero sin tantear).

(Actividad 5C)

Definición (potencias unitarias de números positivos)

Si n es un número entero positivo y r es un número real no negativo, la potencia unitaria de r es un número a no-negativo que multiplicado por sí mismo n veces da r , $a^n = r$.

La potencia unitaria de un número r se denota $r^{\frac{1}{n}}$.

Ejemplos:

$$16^{\frac{1}{4}} = 2 \quad \text{ya que } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \text{ y } 2 \text{ es no negativo.}$$

$$9^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \text{ ya q } \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = 3 \cdot 3 = 9 \text{ y } 3^{\frac{1}{2}} \text{ es no negativo.}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = 2 \quad \text{ya que } 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

1. Verifica que la potencia $\frac{1}{5}$ de 14.1986 es 1.70, usando la definición y multiplicando con una calculadora.
2. Si la potencia $\frac{1}{10}$ de 1, 024 es 2, ¿cuál será su potencia $\frac{1}{5}$? Explique y verifique multiplicando con una calculadora.

(Actividad 5D) Analizando el repaso de potencias que son fracciones unitarias de la forma $\frac{1}{n}$.

Instrucciones:

Utilizando el contenido repasado en las actividades anteriores contesta las siguientes preguntas:

1. Cuando se menciona el concepto “potencia $\frac{1}{2}$ ”, ¿a qué se está haciendo referencia?
2. Sin hacer cálculos, cuál debe ser más grande, la potencia $\frac{1}{2}$ de 77 o la potencia $\frac{1}{6}$ de 77. Explica.

3. En sus propias palabras, sin usar símbolos matemáticos, explique qué es una potencia $\frac{1}{5}$ de un número.
4. En sus propias palabras, sin usar símbolos matemáticos, explique qué es una potencia $\frac{1}{2}$ de un número.
5. En cada uno de los siguientes problemas, completa la sucesión de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número.
 - a. 3, $\square$, 12
 - b. 3, $\square$, 5
 - c. 3, $\square$, $\square$, 5
 - d. 3, $\square$, $\square$, $\square$, 5

(Actividad 5E) Exponentes Fraccionarios no Unitarios

1. Notación exponencial

En esta sección se introduce notación de exponente fraccionario, o sea, se definen exponentes fraccionarios no unitarios de la forma $\frac{n}{m}$ para enteros n , y m .

Definición de $r^{\frac{1}{n}}$

$r^{\frac{1}{n}}$ es un número que multiplicado por sí mismo n veces da r .

Ejemplo 1:

Expresa verbalmente $32^{\frac{1}{5}}$.

Solución: Es un número que multiplicado por si mismo 5 veces da 32.

Ejemplo 2

Expresa verbalmente $19^{\frac{1}{4}}$.

Solución: _____.

1. Compute sin usar una calculadora y exprese verbalmente como en el ejemplo anterior:

a. $4^{\frac{1}{2}} =$

b. $27^{\frac{1}{3}} =$

c. $81^{\frac{1}{4}} =$

2. Use la definición (verbal) de potencia $\frac{1}{5}$ para explicar en palabras por qué

$\left(32^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$. No use calculadora para facilitar la respuesta.

3. Use el hecho que la potencia $\frac{1}{5}$ de 19,349.2 es 7.2 para hallar $19,349.2^{\frac{2}{5}}$. Use su calculadora solamente para multiplicar.

Se quiere que se cumpla la regla de la potencia para exponentes $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$. Esto obliga a definir exponentes racionales como $r^{\frac{a}{b}} = r^{\frac{1}{b} \cdot a} = \left(r^{\frac{1}{b}}\right)^a$

Definición de $r^{\frac{m}{n}}$

Se define $r^{\frac{m}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)^m$, para $r > 0$.

En palabras, $r^{\frac{m}{n}}$ es un número $\left(r^{\frac{1}{n}}\right)$ que multiplicado por sí mismo n veces da r , pero está multiplicado por sí mismo m veces.

4. Explique verbalmente el significado de $4^{\frac{2}{3}}$.

5. Explique verbalmente el significado de $40^{\frac{3}{7}}$.

6. Escribe en la forma $r^{\frac{m}{n}}$:

a) $19^{0.3}$

b) $19^{0.31}$

c) $25^{5.13}$

(Actividad 5F) Analizando el repaso de potencias que son fracciones unitarias y potencias que son fracciones no unitarias.

Instrucciones:

Utilizando el contenido repasado en la Actividad E contesta la siguiente pregunta:

1. Después de haber definido el concepto exponente entero, define en tus propias palabras:
 - a. El concepto exponente fraccionario unitario.
 - b. El concepto exponente fraccionario no unitario.

Apéndice Q

Actividad de Aprendizaje 6 (A6)

Nota alcalce: El inicio de la actividad # 6 se implementó en la sala de clases en el estudio. No se pudo completar la misma por motivos de la pandemia.

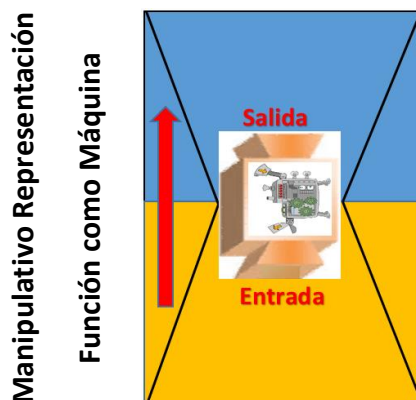
Extendiendo la definición de función exponencial a los racionales

(Actividad 6A) Buscando patrones con fichas sobre cómo se puede estimar la altura de un globo aerostático, por minutos en los pueblos de Hormigueros y Sabana Grande

Previo a la actividad contesta los primeros dos ejercicios dada una situación en contexto.

1. Una cantidad de bacterias crece exponencialmente. ¿Si cada dos días la cantidad presente se multiplica por 16, por cuánto se multiplica la cantidad cada día? Verifica tu respuesta.
2. Una cantidad de bacterias crece exponencialmente. ¿Si cada tres días la cantidad presente se multiplica por 16, por cuánto se multiplica la cantidad cada día? Verifica tu respuesta.

Instrucciones:



En esta actividad tendrás que buscar patrones utilizando las fichas provistas que representan la máquina de una función para completar diferentes listas. Necesitamos que nos ayudes a completar las mismas encontrando términos y a descubrir las reglas que están ocultas en cada una de ellas. La actividad te desafiará continuamente.

Primera Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo aerostático por minutos de vuelo en el pueblo de Hormigueros

Suponga que en el pueblo de Hormigueros un modelo matemático proyecta que la altura inicial de la cesta de un globo aerostático con respecto a la superficie de la tierra es de 0.46 metros y se triplica cada dos minutos de vuelo como muestran algunos datos del modelo.

1. Ordena las fichas utilizando los números que se encuentran en la parte inferior de la ficha y encuentra un patrón para completar los términos de las otras fichas que faltan.

Altura del globo aerostático en (pulgadas)	0.46		
Tiempo de vuelo en (minutos)	0	1	2

- a. Explica por qué al transcurrir dos minutos de vuelo habrán 1.38 metros de altura.
- b. ¿Cuál es el factor multiplicativo por minutos de vuelo? Verifica que al cabo de dos minutos tripliques.
- c. ¿Cuál es la altura del globo aerostático cuando haya transcurrido un minuto de vuelo?
- d. Verifica que la altura del globo aerostático al transcurrir un minuto de vuelo por el factor multiplicativo por minutos de vuelos es igual a la altura del globo aerostático al transcurrir el segundo minuto de vuelo.

Segunda Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo aerostático por minutos de vuelos en el pueblo de Sabana Grande.

Suponga que en el pueblo de Sabana Grande un modelo matemático proyecta que la altura inicial del canasto de un globo aerostático con respecto a la superficie de la tierra es de 0.91 metros y se duplica de cada tres minutos de vuelos como muestran algunos datos del modelo.

Altura del globo aerostático en (metros)	0.91			
Tiempo de vuelo en (minutos)	0	1	2	3

- Explica por qué cuando transcurran tres minutos de vuelo el globo aerostático tendrá una altura de 1.82 metros.
- ¿Cuál es el factor multiplicativo por minutos de vuelo?
- ¿Cuál sería la altura del globo aerostático al transcurrir el primer minuto de vuelo?
- ¿Cuál sería la altura del globo aerostático al transcurrir el segundo minuto de vuelo?
- Verifica que la altura del globo aerostático al transcurrir el primer, segundo y tercer minuto de vuelo se puede obtener multiplicando la altura inicial 0.91 sucesivamente por el factor multiplicativo (por minutos de vuelo) que halló.

Tercera Ronda del Estudio

- Suponga que una nave espacial está aumentando su distancia de la Tierra en un 60% cada semana.

Tabla 1

distancia en Km	100		
Semanas	1	2	3

Tabla 2 (Observa el cambio en unidades)

distancia en Km	100							
Días	7	8	9	10	11	12	13	14

Tabla 3

distancia en Km					
Días	14	18	22	26	30

- a. ¿A qué distancia está la nave de la Tierra en la semana dos? ¿En la semana tres? (Completa la tabla semanal).
- b. Explique por qué el factor multiplicativo semanal es de 1.6.
- c. Verifique que todos los datos obtenidos en la tabla 1 los obtienes utilizando el factor multiplicativo de 1.6.
- d. ¿Cuál es el factor multiplicativo diario?
- e. Utiliza el factor multiplicativo diario para completar la tabla 2.
- f. Verifique que los datos para la semana 2 y el día 14 coinciden.
Halla el factor multiplicativo de cada cuatro días. Usa el factor multiplicativo de cada cuatro días para completar la tabla 3.

Instrucciones:

Utilizando los hallazgos en las rondas 1, 2 y 3:

1. Supongamos que un cohete de la Nasa se encuentra a una distancia de 45.58 Km de la Tierra cuando se comienza a medir el tiempo en días de vuelo y que su distancia de la Tierra se cuadruplica cada cinco días de vuelo.
 - a. ¿Cuál es el factor multiplicativo diario de aumento de la distancia en Km del cohete de la Nasa de la Tierra?
 - b. ¿Cuál es el factor multiplicativo semanal de aumento de la distancia en Km del cohete de la Nasa de la Tierra?
 - c. ¿A qué distancia de la Tierra se encontrará el cohete de la Nasa al transcurrir 35 días de vuelo?
 - d. ¿A qué distancia de la Tierra se encontrará el cohete de la Nasa en la tercera semana de vuelo?

Apéndice R

Actividad de Práctica 0 (AP0)

Practicando la notación exponencial con exponentes enteros

1. Escribe cada uno de estos enunciados en notación exponencial. No lleve a cabo la multiplicación.
 - a) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$
 - b) $5.04 \times 5.04 \times 5.04 \times 5.04 \times 5.04 \times 5.04 \times 5.04$
 - c) $0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2$
 - d) $\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right)$
 - e) $m \times m \times m \times m \times m \times m \times n \times n \times n \times n$
2. Expande cada una de las siguientes expresiones para ponerlas sin usar notación de exponentes, como productos repetidos. No simplifique.
 - a) $m^3 \cdot m^5$
 - b) $4p^3(p^2)^7$
 - c) $(-5)^4$
 - d) -5^4
 - e) $3c^3 \div (3c^3)^6$
 - f) $\left(\frac{4p}{7q}\right)^4$
3. Expande y simplifica cada una de las siguientes expresiones exponenciales.
 - a) 4^5
 - b) $5 \cdot 3^4$

- c) $(3 \cdot 2)^6$
- d) $(4a)^3$
- e) $(2m^3n)^4$
- f) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

4. Simplifique cada expresión.

a) $2^{1,578} \cdot 2^{793}$

b) $\frac{7^{645}}{7^{239}}$

c) $\frac{(7^{30})^5}{(7^{17})^6}$

d) $\frac{1.07^{17}}{1.07^{17}}$

e) 1.07^0 (¿Qué relación puedes establecer entre las partes d y e?)

5. Use cancelación para simplificar cada uno de los enunciados.

a) $\frac{3y^{12}}{y^8}$

b) $\frac{4^3}{4^9}$ Justifica en tus propias palabras por qué es conveniente definir 4^{-6}

como $\frac{1}{4^6}$ y no de otra forma.

c) ¿Qué puedes decir del producto $4^{-6} \times 4^6$ la definición del exponente 0 y de exponentes negativos?

d) Dado $\frac{b^m}{b^n}$, ¿será igual a b^{m-n} o $\frac{1}{b^{n-m}}$? Explique.

e) ¿Será cierto que $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ sin importar cual es mayor de m o n o si ambos son iguales?

6. Rescriba sin usar potencias negativas. ¡Muestra tu trabajo!

a) -3^{-5}

b) p^{-2}

c) 12^{-2}

d) $2 \cdot 3^{-5}$

e) $\frac{1}{p^{-5}}$

f) $\frac{1}{3p^{-5}}$

g) $\frac{3^{-2}}{2^{-3}}$

7. Evaluar tanto $p(x)$ como $q(x)$ para los siguientes valores de x :

$$x = 2, \quad x = 4, \quad x = -3, \quad x = -1$$

a. $p(x) = 2^x$

b. $q(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

Apéndice S

Actividad de Práctica 1 (AP1)

Practicando sucesiones exponenciales, considerando “el moverse a la derecha en pasos unitarios”

(Actividad 1A):

Definición: Cambio exponencial

Una cantidad se dice que cambia exponencialmente cuando valores sucesivos de la cantidad se obtienen multiplicando por una misma constante. Determine si las cantidades C_1 , C_2 , C_3 y C_4 cambian en las siguientes tablas exponencialmente,

1. Determine si las “*entradas*” x y “*salidas*” y dadas en cada una de las tablas de valores corresponden a un modelo de crecimiento exponencial o no. Para las tablas de valores que correspondan a un modelo de crecimiento exponencial, identifique el valor de la base b .

a.

Salida	6	12	18	30	54
Entrada	0	1	2	3	4

b.

Salida	1	4	16	64	256
Entrada	0	1	2	3	4

c.

Salida	5	8	11	14	17
Entrada	0	1	2	3	4

d.

Salida	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$
Entrada	0	1	2	3	4

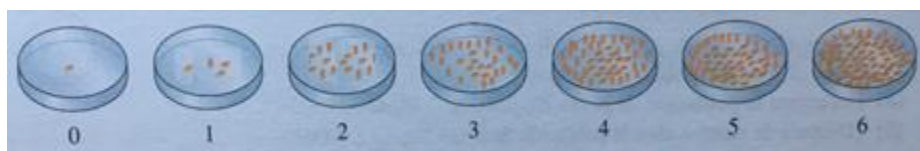
(Actividad 1B): Estudiando crecimiento exponencial de bacterias (tiempo duplicación en pasos unitarios)

Muchas cantidades en la naturaleza tienen una razón de instantánea de cambio que depende de la cantidad presente en ese instante. Por ejemplo, la razón de crecimiento de una población medida en nacimientos por año depende de la

cantidad de la población en ese momento; mientras mayor la población, mayor los nacimientos por año. Puede mostrarse que estas cantidades crecen exponencialmente. El crecimiento exponencial de una cantidad tiene la característica de que para intervalos de tiempo de largo fijo (entradas) los cambios en la cantidad (salidas) se obtienen multiplicando la cantidad presente por un factor multiplicativo fijo. Por ejemplo, una cantidad que se duplica cada segundo crece exponencialmente.

Primera Ronda estudio de población de bacterias mediante un cultivo que se cuadruplica por horas

En un laboratorio se trabaja en placas Petri con un cultivo de bacterias. Supongamos que empezamos con una sola bacteria, que se cuadruplica cada hora. Después de una hora tenemos 4 bacterias, después de dos horas tenemos 16 bacterias, después de tres horas tenemos 64 bacterias y así sucesivamente (Vea figura).



Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior.

Cantidad (bacterias)	1	4			256			16,384		
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7		9

- ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?
- La progresión, ¿aumenta o disminuye?
- ¿Cuál era la cantidad de bacterias cuando se comenzó a tomar los datos?
- ¿Si el factor de crecimiento continúa igual, qué cantidad de bacterias habrá en la placa Petri luego de haber transcurrido 15 horas (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?

Segunda Ronda estudio de población de bacterias mediante un cultivo que se duplica por horas

Supongamos que en otro segundo estudio empezamos con diez bacterias de estas, que se duplican cada hora. Después de una hora tenemos 20 bacterias, después de dos horas tenemos 40 bacterias y así sucesivamente (Vea figura).



Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior.

Cantidad (bacterias)		20	40				640				10,240
Tiempo (horas)	0	1	2	3		5	6	7		9	

- ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?
- ¿Cómo se halla el factor multiplicativo del crecimiento de las bacterias por cada hora en este modelo usado en los datos?
- ¿Cuál era la cantidad de bacterias cuando se comenzó a tomar los datos?
- ¿Si el factor de crecimiento continúa igual, que cantidad de bacterias habrá en la placa Petri luego de haber transcurrido 16 horas (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?

(Actividad 1C): Estudiando crecimiento exponencial de la altura de un globo

Asumir altura de globo crece exponencialmente como función del tiempo, o sea, digamos que la altura se multiplica por una misma constante cada minuto.

Primera Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Inflado con gas Helio, en el pueblo de Salinas



Asumamos que en unas fiestas patronales de Salinas un joven preuniversitario compró varios globos inflados con gas de helio. Uno de los globos se soltó de su mano ascendiendo hacia la atmósfera. Digamos que la altura del globo de látex inflado con gas helio se multiplica cada minuto por la misma constante. Asumamos que en términos ficticios el globo de látex inflado con gas helio no explota a medida que aumenta su altura en metros con respecto al tiempo de vuelo en minutos.



1. Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores en este segundo estudio y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior. Los datos que se dan en la tabla han sido redondeados a dos lugares decimales. ¿Podrías determinar los términos que faltan en la tabla y escribirlos?

Altura (metros)	3	3.15	3.31	3.48											
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- a. ¿Cuál era la altura del globo de látex inflado con helio cuando se comenzaron a tomar datos?
- b. ¿Cómo se halla el factor multiplicativo por cada minuto de vuelo del globo de látex inflado con helio de este modelo usado en los datos?
- c. Expresa los valores de salida en la tabla (la altura en metros del globo de látex inflado con helio) con notación de exponente.

La siguiente tabla corresponde a los datos de un estudio estimación de la altura de un globo de látex inflado con helio en las fiestas patronales de Salinas, con otro factor multiplicativo. Asumamos que en términos ficticios el globo de látex inflado con gas helio no explota a medida que aumenta su altura en metros con respecto al tiempo de vuelo en minutos.



¿Puedes hallar el factor multiplicativo constante y usarlo para llenar los datos que faltan en la tabla de valores?

Altura (metros)	9	13.5	13,301.0	
Tiempo (minutos)	15	16	33	34

¿Cuál es el factor multiplicativo por minuto?

Segunda Ronda del Estudio Estimación de la Altura de un Globo Inflado con gas Helio, en el pueblo de Fajardo

Asumamos que en términos ficticios el globo de látex inflado con gas helio no explota a medida que aumenta su altura en metros con respecto al tiempo de vuelo en minutos.

Suponga que luego de varios minutos, en las fiestas patronales del pueblo de Fajardo un nuevo modelo matemático proyecta que el factor multiplicativo por minutos de vuelo, de la altura en (metros) de un globo de látex inflado con helio es de 0.67 como muestran algunos de los datos del estudio (aproximados a dos lugares decimales).

- a. Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores en esta ronda del estudio y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos? (Es conveniente usar notación exponencial)

2.

Altura (metros)	1,835	1,229.45						
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7

- b. ¿Qué sucede diferente en esta ronda de las anteriores? ¿Qué tiene que ver el factor multiplicativo con esto?
- c. ¿Si se quiere que la altura en (metros) de un globo de látex inflado con helio decrezca más rápidamente, qué puede decirse del factor multiplicativo?
- d. ¿Cómo comparas la progresión de la altura en (metros) de un globo de látex inflado con helio en las fiestas patronales de Salinas con el globo de látex inflado con helio en las fiestas patronales de Fajardo? ¿Qué rol juega el factor multiplicativo en esto?

(Actividad 1D): Analizando las dos rondas del estudio de población de bacterias mediante un cultivo que se triplica y duplica por horas de la (Actividad 1B) y las dos rondas del estudio altura en (metros) de un globo de látex inflado con gas helio en fiestas patronales de distintos pueblos de Puerto Rico de la (Actividad 1C)

Instrucciones: Utilizando los hallazgos de los estudios en las rondas 1, 2 de la (Actividad 1B) y 1 y 2 de la (Actividad 1C):

1. Explica en tus propias palabras lo que has aprendido sobre el factor multiplicativo en las diferentes rondas de estudios.
2. ¿Qué puede decirse si el factor multiplicativo de una cantidad que cambia exponencialmente es mayor que 1? ¿Y si el factor multiplicativo es menor que 1? Explica.
3. ¿Cómo puede hallarse el factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora a partir de un factor multiplicativo por minutos? ¿Cómo puede hallarse el factor multiplicativo por hora a partir de un factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora?
4. Supongamos que en las fiestas patronales de Vega Baja la altura inicial de un globo de látex inflado con gas helio es de 3 metros con respecto a la superficie de la Tierra con un factor multiplicativo de 4 y que en las fiestas patronales del pueblo de Hatillo la altura inicial de un globo de látex inflado con gas helio es de 6 metros con un factor multiplicativo de 3.

¿Qué juega un papel más importante en la altura de un globo de látex inflado con gas helio a largo plazo, la altura inicial del globo o el factor multiplicativo de cambio? Justifica tu respuesta.

5. Supongamos que en las fiestas patronales de Cabo Rojo la altura inicial de un globo de látex inflado con gas helio con respecto a la superficie de la Tierra es de 16 metros con un factor multiplicativo de 1.03 y que en las fiestas patronales del pueblo de Hatillo la altura inicial del hilo o cuerda de un globo de látex inflado con gas helio es de 5 metros con un factor multiplicativo por minutos de 1.08.

¿Será necesariamente cierto que, a través del tiempo de vuelo, la altura del globo de Cabo Rojo va a ser más que la altura del globo de Hatillo? Justifica tu contestación.

6. ¿Qué aprendiste sobre la cantidad de períodos de tiempo, altura inicial del globo de látex inflado con gas helio, factor multiplicativo y la altura total del globo? ¿Puedes expresar en una fórmula la relación entre estas diferentes variables?

Apéndice T

Actividad de Práctica 2 (AP2)

Una misión de la NASA estudiará el cosmos con un globo estratosférico



Esta imagen muestra un globo aerostático de gran altitud ascendiendo a la atmósfera superior. Cuando estén completamente inflados, estos globos tienen 400 pies (150 metros) de ancho, o el tamaño de un estadio de fútbol aproximadamente y alcanzan una altitud de 130,000 pies (24.6 millas o 40 kilómetros).

Crédito: Imagen conceptual del Centro de Vuelo Espacial Goddard de la NASA / Michael Lentz

Transportado por un globo aerostático del tamaño de un estadio de fútbol, ASTHROS utilizará un telescopio de última generación para observar longitudes de onda de luz que no son visibles desde el suelo.

El 6 de agosto de 2020 la NASA publicó que empezaron a trabajar en una nueva misión ambiciosa que transportará un telescopio de vanguardia de 8.4 pies (2.5 metros) de altura en un globo aerostático hasta la estratósfera. Tentativamente programado para lanzarse en diciembre de 2023 desde la Antártida, ASTHROS (Telescopio Estratosférico Astrofísico para Observaciones de Alta Resolución Espectral a Longitudes de Ondas Submilimétricas por sus siglas en inglés)

permanecerá volando a la deriva en las corrientes de aire sobre el gélido continente por unas tres semanas y brindará nuevos hallazgos durante su viaje.

Si bien los globos aerostáticos pueden parecer una tecnología anticuada, ofrecen a la NASA ventajas únicas en comparación con las misiones terrestres o espaciales. El Programa de Globos Aerostáticos Científicos de la NASA han operado por 30 años en la Instalación de Vuelo Wallops, en Virginia. Lanza entre 10 a 15 misiones al año desde todo el mundo en apoyo a experimentos de todas las disciplinas científicas de la NASA, así como con fines de desarrollo tecnológico y educativo. Las misiones en globo aerostático no solo tienen costos más bajos en comparación con las misiones espaciales, sino que además llevan menos tiempo entre su planificación y despliegue, lo que significa que pueden asumir mayores riesgos asociados al uso de tecnologías nuevas o de última generación que aún no han sido desplegadas en el espacio. Estos riesgos pueden presentarse en forma de problemas técnicos u operacionales desconocidos que impacten los resultados científicos de una misión. Al superar estos desafíos, las misiones de globos aerostáticos crean las bases para que futuras misiones cosechen los beneficios de estas nuevas tecnologías.

(Actividad 2A): Buscando patrones sobre cómo se puede estimar la altura en metros de ASTHROS (Telescopio Estratosférico Astrofísico para Observaciones de Alta Resolución Espectral a Longitudes de Ondas Submilimétricas por sus siglas en inglés), por minutos transportado por un globo aerostático

Primera ronda del Estudio Estimación de la Altura de ASTHROS, por minutos de vuelo

Suponga que en una primera ronda de un estudio en la NASA se proyecta un aumento en la altura en (metros) de ASTHROS, transportado por un globo aerostático por minutos de vuelo, como predicen algunos de los datos que se obtienen de un modelo matemático. Este modelo asume crecimiento exponencial de la altura, o sea, asume que hay un factor multiplicativo constante.



1. Encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la tabla.

Altura (metros)	4	7.2	12.96	23.33	41.99										
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	14	21	28	35	42	49	56

- ¿Podrías determinar los términos que faltan en la tabla y escribirlos?
- ¿Cómo se pueden usar los datos provistos para hallar el factor multiplicativo por minutos?
- ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada 7 minutos?
- ¿Cómo se puede buscar el factor multiplicativo de cada $\frac{1}{4}$ de hora? (Use notación exponencial de ser conveniente)
- ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora? Compútelo de dos maneras diferentes (debe dar lo mismo sujeto a posible error numérico).
- ¿Cuál es el factor multiplicativo por hora?
- ¿Qué rol juega la altura inicial de ASTHROS con respecto al suelo en esto?

Segunda ronda del Estudio Estimación de la Altura de ASTHROS, por minutos de vuelo

Si se proyecta en una segunda ronda de un estudio en la NASA que el factor multiplicativo por minuto de vuelo de la altura de ASTHROS es de 1.07 como muestran algunos de los datos de un estudio.

- Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior.

Altura (metros)	23								
Tiempo (minutos)	0	1	15	30	45	60	75	90	

- ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada 15 minutos?



- b. ¿Cuál es el factor multiplicativo de cada $\frac{1}{2}$ hora, computado de dos formas diferentes?
- c. ¿Cuál fue la altura inicial de ASTHROS?
- d. ¿Puedes aproximar la altura en (metros) ASTHROS en intervalos de tiempo de 83 minutos? 3 horas? Explica tu respuesta.

(Actividad 2C) Analizando la Segunda del Estudio Estimación de la Altura de ASTHROS, por minutos de vuelo

1. Si conoces un factor multiplicativo por minutos de una cantidad que cambia exponencialmente, ¿cómo hallas un factor multiplicativo de cada $\frac{1}{4}$ de hora, $\frac{1}{2}$ hora, 1 hora? Explica tu respuesta.

Apéndice U

Actividad de Práctica 3 (AP3)

Practicando extender función exponencial a los enteros

(Actividad 3A): Buscando patrones sobre cómo se puede estimar la altura en metros de ASTHROS, en dos diferentes estudios

Primera Ronda de un Estudio Estimación de la Altura de ASTROS por minutos de vuelo

1. Asuma que en una primera ronda de un estudio en la NASA ASTHROS se encontraba en una altura de 319.17 m 5 minutos luego de comenzar a tomar el tiempo y que un modelo matemático predice que la altura del ASTHROS, se duplica cada minuto.

Altura (metros)						319.17
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5



- a. ¿Identificaste algún patrón o regla para determinar los términos que faltan?
- b. ¿Cuál es la altura de ASTHROS con respecto a la superficie del suelo, al momento de comenzar a tomar los datos (minuto 0)?
- c. ¿Puedes anticipar la altura en metros de ASTHROS en un intervalo de tiempo de 15 minutos desde el momento inicial? Explica tu respuesta.
- d. ¿Cuál es la altura de ASTHROS, que puede esperarse que hubiese un minuto de vuelo antes, dos minutos de vuelo antes y tres minutos de vuelo antes de comenzar a tomar datos? Complete la tabla.

Altura (metros)				9.97
Tiempo (minutos)	-3	-2	-1	0

2. La siguiente sucesión crece exponencialmente con un factor multiplicativo de

- a. Complete la tabla asegurándose que el factor multiplicativo sea 3.

Altura (metros)								9	27	81
Tiempo (minutos)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

- b. ¿Hay relación entre las entradas negativas con sus salidas correspondientes y lo que usted conoce de exponentes negativos? Explique.
- c. ¿Hay relación entre la entrada 0 con su salida correspondiente y lo que usted conoce acerca del exponente cero? Explique.

Segunda ronda de un Estudio Estimación de la Altura de ASTROS por minutos de vuelo

3. Utiliza los datos de la tabla del enunciado (b) para contestar las preguntas.

- a. ¿Cuál es el factor multiplicativo por hora de vuelo?
- b. Complete la tabla aproximando a dos lugares decimales.

Altura (metros)					6,446.36			557,681	724,986
Tiempo (minutos)	0	1	15	30	45	60	61	62	63

- c. ¿Cómo se usa el factor multiplicativo por hora de vuelo para hallar el factor multiplicativo de cada $\frac{1}{4}$ hora de vuelo?
- d. ¿Cuál es la altura de ASTHROS al transcurrir 8 horas de vuelo?

(Actividad 3B): Analizando lo aprendido en esta actividad

Instrucciones:

1. Explica en tus propias palabras lo que has aprendido sobre el factor multiplicativo en esta actividad.

Explica en tus propias palabras lo que has aprendido acerca del exponente cero y de exponentes enteros negativos.

Apéndice V

Actividad de Práctica 4 (AP4)

Nota al calce: La actividad de práctica # 4 se omitió y no se implementó en el estudio ya que los estudiantes demostraron en las actividades de aprendizaje # 1 y # 2 tener noción de notación de función.

Practicando la notación funcional

(Actividad 4A) Descubriendo y aplicando modelos matemáticos

Definición: Cambio exponencial

1. Para cada una de las siguientes tablas encuentra una fórmula en términos de la variable x que cuando sustituyas valores de entradas por la x resulte en los valores de salida correspondientes. Verifica la fórmula que hallaste usando datos de la tabla.

a.

x	$g(x)$
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7

b.

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

c.

n	$b(n)$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

d.

x	$p(x)$
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216

2. ¿Cuáles de los siguientes modelos matemáticos representan un cambio exponencial? Explica. Para los modelos matemáticos que representan un cambio exponencial, indica ¿cuál es el factor multiplicativo?

a. $m(x) = 5x^2$

b. $q(t) = 4(3^t)$

c. $f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$

d. $c(n) = 1.7(0.72)^n$ e. $h(x) = 5x + 2$

3. Una función h está definida por la fórmula $h(n) = 4^n$.

- a. Evalúe la función para: $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$, $h(6)$, $h(7)$, $h(8)$ y $h(9)$.

$h(n)$	1	4	16						
n	0	1	2	3	4				

4. Evalúe una función exponencial $p(n) = 3 \cdot (1.8)^n$ para los elementos dados del dominio.

Evalúe la función para: $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$ y $p(5)$.

$p(n)$	3	5.4	9.72			
n	0	1	2	3	4	5

5. Escribe una posible fórmula exponencial para la función representada por la tabla de la derecha.

$g(n)$	3.6	5.76	9.22	14.75
n	0	1	2	3

$$g(\boxed{}) = \boxed{} * \boxed{}^{\boxed{}}$$

6. Escribe una posible fórmula exponencial para la función representada por la tabla de la derecha.

$$f(\boxed{}) = \boxed{} * \boxed{}^{\boxed{}}$$

$f(t)$	6.2	4.34	3.04	2.13
t	0	1	2	3

7. Determine una fórmula para las funciones exponenciales $f(x)$ y $g(x)$ cuyos valores se dan en la tabla:

$$f(\boxed{}) = \boxed{} * \boxed{}^{\boxed{}} \quad g(\boxed{}) = \boxed{} * \boxed{}^{\boxed{}}$$

Valores para las dos funciones exponenciales		
x	$f(x)$	$g(x)$
-2	6	108
-1	3	36
0	$\frac{3}{2}$	12
1	$\frac{3}{4}$	4
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{3}$

(Actividad 4B) Hallar modelos matemáticos para estimar crecimientos exponenciales

1. Primera ronda de un estudio relacionado a la estimación de cantidad de usuarios de una aplicación de Internet

Se estima que la cantidad de usuarios de una aplicación de Internet se va a triplicar cada mes. Asuma que comenzamos con 10 usuarios cuando se lanza la aplicación. Entonces luego de un mes habrá 30 usuarios. Halla una fórmula que le permita decir cuántos usuarios va a tener después de n meses.

Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior.

Cantidad (usuarios)	10	30							...	
Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	...	n

- Encuentre un modelo matemático (una fórmula) para el número de usuarios de la aplicación de Internet después de n meses.
- Estime la cantidad de usuarios después de 9 meses y 12 meses.

- c. ¿En cuántos meses aproximadamente el número de usuarios llegará a un millón?

2. Buscando un modelo matemático para estimar la altura en metros de ASTHROS (Telescopio Estratosférico Astrofísico para Observaciones de Alta Resolución Espectral a Longitudes de Ondas Submilimétricas por sus siglas en inglés), por minutos transportado por un globo aerostático

Primera ronda del Estudio Estimación de la Altura de ASTHROS, por minutos de vuelo

Suponga que en una primera ronda de un estudio en la NASA se proyecta un aumento en la altura en (metros) de ASTHROS, transportado por un globo aerostático por minutos de vuelo, como predicen algunos de los datos que se obtienen de un modelo matemático. Este modelo asume crecimiento exponencial de la altura, o sea, asume que hay un factor multiplicativo constante.



Encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la tabla.

Altura (metros)	4	7.2	12.96	23.33	41.99			
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7

- Encuentre un modelo matemático exponencial (una fórmula) para la altura en (metros) de ASTHROS en el estudio después de t minutos.
- Estime la altura en (metros) de ASTHROS después de 5 horas.
- Tantee usando la fórmula para estimar la cantidad de horas en que ASTHROS llegará a alcanzar una altura de 917,873 metros.

Apéndice W

Actividad de Práctica 5 (AP5)

Practicando con Potencias Fraccionarias Unitarias y Potencias Fraccionarias No Unitarias

(Actividad 5A) Practicando aún más con Potencias Fraccionarias Unitarias

Instrucciones: Tanteando con una calculadora científica aproxima a dos lugares decimales la solución de los siguientes dos problemas.

1. ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo nos da 11? (correcto a 2 lugares decimales)
2. ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo nos da 37?
3. Utiliza la calculadora (sin tantear) para aproximar un número que al multiplicarlo por sí mismo de 51.
4. ¿Qué relación hay entre el número que hallaste en la pregunta anterior y $51^{\frac{1}{2}}$?

(Actividad 5B) Practicando aún más con potencias

Comparar aproximaciones de potencias a la centésima más cercana utilizando la calculadora

Conteste las siguientes preguntas sin usar radicales ni exponentes fraccionales en una calculadora científica.

1. ¿Entre qué dos números enteros consecutivos se encuentra $17^{\frac{1}{3}}$?
2. Aproxima a la centésima más cercana tanteando con la calculadora sin usar potencias fraccionarias un número que multiplicado por sí mismo tres veces da 21.

Luego utiliza la calculadora científica para comparar los valores que obtuviste tanteando con los cálculos obtenidos en la calculadora.

3. ¿Entre qué dos enteros consecutivos se haya $723^{\frac{1}{3}}$? Tanteen hasta que el valor que hallen esté correcto de $723^{\frac{1}{3}}$ a la centésima más cercana.
4. Aproxima a dos lugares decimales, un número que multiplicado por sí mismo tres veces da 23 (usando calculadora, pero sin tantear).

(Actividad 5C) Practicando aún más potencias fraccionarias unitarias

1. Verifica que la potencia $\frac{1}{6}$ de 47.0459 es 1.9, usando la definición y multiplicando con la calculadora (sin usar exponentes ni raíces).

(Actividad 5D) Analizando la práctica de potencias fraccionarias unitarias.

Instrucciones:

Utilizando el contenido repasando en las actividades anteriores contesta las siguientes preguntas:

1. Cuando se menciona el concepto “potencia $\frac{1}{2}$ de un número real a positivo”, ¿a qué se está haciendo referencia? Explica en palabras.
2. Sin hacer cálculos, cuál debe ser más grande, la potencia $\frac{1}{2}$ de 51 o la potencia $\frac{1}{5}$ de 51. Explica.
3. En sus propias palabras, sin usar símbolos matemáticos, explique qué es una potencia $\frac{1}{7}$ de un número.
4. En sus propias palabras, sin usar símbolos matemáticos, explique qué es una potencia $\frac{1}{4}$ de un número.
5. En cada uno de los siguientes problemas, completa la sucesión de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número.
 - a. 4, ___, 64

b. 2, ____, 4

c. 2, ____, ____, 4

d. 2, ____, ____, ____, 4

(Actividad 5E) Exponentes Fraccionarios Unitarios y No Unitarios

Ejemplo 1:

Expresa verbalmente $41^{\frac{1}{7}}$.

Solución: Es un número que multiplicado por sí mismo 7 veces da 41.

Ejemplo 2

Expresa verbalmente $23^{\frac{1}{8}}$.

Solución: _____.

1. Expresa verbalmente como en el ejemplo anterior:

a. Expresa verbalmente $5^{\frac{1}{3}}$

b. Expresa verbalmente $8^{\frac{1}{3}}$

c. Expresa verbalmente $256^{\frac{1}{4}}$

2. Use la definición (verbal) de potencia $\frac{1}{6}$ para explicar en palabras por qué $(729^{\frac{1}{6}})^6 = 729$.

3. Use el hecho que la potencia $\frac{1}{7}$ de 27,181.9 es 4.3 para hallar $27,181.9^{3/7}$. Use su calculadora solamente para multiplicar.

Se quiere que se cumpla la regla de la potencia para exponentes $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$. Esto obliga a definir exponentes fraccionarios no unitarios como $r^{\frac{a}{b}} = r^{\frac{1}{b} \cdot a} = (r^{\frac{1}{b}})^a$.

Definición de $r^{\frac{m}{n}}$

Se define $r^{\frac{m}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)^m$, para $r > 0$.

En palabras, $r^{\frac{m}{n}}$ es un número $\left(r^{\frac{1}{n}}\right)$ que multiplicado por sí mismo n veces da r , pero está multiplicado por sí mismo m veces.

4. Explique verbalmente (como en la oración de arriba) el significado de $3^{\frac{3}{5}}$.

5. Explique verbalmente el significado de $50^{\frac{2}{3}}$.

6. Asuma que se cumple la regla de la potencia para exponentes $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$. Escriba cada expresión usando exponentes fraccionarios unitarios (fracciones unitarias positivas).
 - a) $(7)^{-\frac{1}{4}}$
 - b) $(5)^{-\frac{1}{2}}$
7. Escriba cada expresión usando exponentes fraccionarios no unitarios en la forma $r^{\frac{m}{n}}$:
 - a) $23^{0.4}$
 - b) $23^{0.41}$
 - c) $23^{4.17}$

(Actividad 5F) Analizando la práctica de exponentes fraccionarios unitarios y no unitarios.

Instrucciones:

Utilizando el contenido practicado en la Actividad (5E) contesta la siguiente pregunta:

1. Después de haber definido el concepto exponente enteros, define en tus propias palabras:

- a. el concepto exponente fraccionario unitario.
- b. el concepto exponente fraccionario no unitario.

Apéndice X

Actividad de Práctica 6 (AP6)

Nota al calce: La actividad de práctica # 6 no se implementó en el estudio.

No se pudo completar la misma por motivos de la pandemia.

Practicando la extensión de la definición de función exponencial a los racionales

(Actividad 6A): Buscando patrones sobre cómo se puede estimar la población de conejos introducida en una isla, en tres diferentes estudios

Previo a la actividad contesta los primeros dos ejercicios dada una situación en contexto.

1. ¿Si conoces que una cantidad de conejos se multiplica por 9 cada 2 años, cómo podrías hallar el factor multiplicativo por año? Verifica tu respuesta.
2. Si conoces que una cantidad de conejos se multiplica por 12 cada 2 años, ¿cómo podrías hallar el factor multiplicativo por año? Verifica tu respuesta.

Instrucciones: En esta actividad tendrás que buscar patrones que representan una función como máquina para completar diferentes listas. Necesitamos que nos ayudes a completar las mismas encontrando términos y a descubrir las reglas que están ocultas en cada una de ellas. La actividad te desafiará continuamente.

Primera Ronda del Estudio Estimación de la población de conejos por meses en una isla

Supongamos que se introducen 55 conejos en una isla y que la población se duplica de cada tres meses.

1. Utiliza los números que se encuentran en la parte inferior en la tabla de valores y encuentra un patrón para completar los términos que faltan en la parte superior.



Cantidad (conejos)	55			
Tiempo (meses)	0	1	2	3

- Explica por qué al transcurrir cinco meses habrá 174 conejos en la isla.
- ¿Cuál es el factor multiplicativo de crecimiento de la población de conejos por cada año en la isla?
- ¿Cuál es la cantidad de conejos en la isla cuando haya transcurrido un año y cinco meses?

Segunda Ronda del Estudio Estimación de la población de conejos por meses en otra isla

Suponga que cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 2,580 y se duplica cada cuatro meses.



Cantidad (conejos)										2,580
Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

- ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?
- ¿Cuál es el factor multiplicativo mensual?
- ¿Cuál sería la cantidad de conejos en la isla luego del primer mes de haber introducido la cantidad inicial de conejos en la isla?
- ¿Cuál sería la cantidad de conejos en la isla luego del segundo mes de haber introducido la cantidad inicial de conejos en la isla?
- Explica por qué cuando transcurran tres meses la población de conejos en la isla será de 1,084.
- ¿Cuál es el factor multiplicativo de crecimiento de la población de conejos por cada cuatro meses?, ¿Cuál es el factor multiplicativo de crecimiento de la población de conejos por cada año en la isla?
- Estime la población a un año después que los conejos fueron introducidos en la isla.

Tercera Ronda del Estudio

2. Suponga que un cohete espacial está aumentando su distancia de la Tierra en un 60% cada semana. Complete las tablas.

- a. ¿A qué distancia está el cohete espacial de la Tierra en la semana dos? ¿En la semana tres? (Completa la tabla semanal).



Tabla 1

distancia en Km	150		
Semanas	1	2	3

- b. Explique por qué el factor multiplicativo semanal es de 1.6.
- c. Verifique que todos los datos obtenidos en la tabla 1 los obtienes utilizando el factor multiplicativo de 1.6.
- d. ¿Cuál es el factor multiplicativo diario?
- e. Utiliza el factor multiplicativo diario para completar la tabla 2.

Tabla 2 (Observa el cambio en unidades)

distancia en Km	150							
Días	7	8	9	10	11	12	13	14

- f. Verifique que los datos para la semana 2 y el día 14 coinciden. Halla el factor multiplicativo de cada cuatro días. Usa el factor multiplicativo de cada cuatro días para completar la tabla 3.

Tabla 3

distancia en Km					
Días	14	18	22	26	30

Instrucciones:

Utilizando los hallazgos en las rondas 1, 2 y 3:

1. Crea un problema donde tengas que utilizar un modelo exponencial con exponentes racionales (fracciones) no enteros. Resuelve el problema.
2. ¿Qué utilidad tiene en pensar en exponentes racionales en un modelo exponencial?